Bolonia

Facultade de Física, USC

Exame de Mecánica Clásica I (Curso 2009-2010)

1 de xullo de 2010

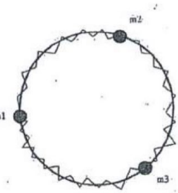
? acceptable

1. Determinar a desviación debida á aceleración de Coriolis dun corpo que cae dende unha altura de 100 m nun lugar de latitude 45^0 N.

T2 2. Unha partícula de masa m que se move por unha superficie cilíndrica de radio a, vese atraida por unha forza proporcional á distancia á orixe de coordenadas, situada no eixo de simetría do cilindro (eixo z). a) Escribir a función de Lagrange en termos das coordenadas xeneralizadas. b) Identificar as simetrías do problema. Hai algunha coordenada cíclica?. En caso afirmativo discutir o seu significado físico. c) Determinar a ecuación diferencial do movemento e resolvela se no instante inicial a partícula se atopa no punto $(a,0,0)$ con velocidade $(0,0,v_o)$, sendo $v_o > 0$. d) Escribir a función de Hamilton e comparala coa enerxía da partícula.

En 100 problemas

3. Tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3 están unidas por muelles de constante k, como mostra a figura. Calcúlense as fecuencias propias e os modos normales de oscilación



4. Un medio dispersivo ten unha relación de dispersión dado pola ecuación

$$w^2 = v^2k^2(1 + sL^2k^2),$$

onde v, s e L son constantes. Escribir a velocidade de grupo e a de fase. Estudialas como función do parámetro s. ¿Tratase dun medio dispersivo normal ou anómalo? ¿ Cómo se interpretaría a lonxitude L ?

413

Scanned with CamScanner

Problema 4

$$\omega^2 = u^2 k^2 (1 + sL^2 k^2) \Rightarrow \omega = uk\sqrt{1 + sL^2k^2}$$

$$V_f = \frac{\omega}{k} = u\sqrt{1 + sL^2k^2}$$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = u\sqrt{1+sL^2k^2} + uk\frac{\cancel{2}sL^2k}{\cancel{2}\sqrt{1+sL^2k^2}}$$

Por lo que si las restamos:

$$V_g - V_f = u\frac{sL^2k^2}{\sqrt{1+sL^2k^2}}$$

Por lo que tenemos 3 casos:

Si $s = 0 \Rightarrow 0 = V_g - V_f \Rightarrow V_g = V_f$ por lo que no hay dispersi

Si $s > 0 \Rightarrow V_g - V_f > 0 \Rightarrow V_g > V_f$ por lo que tenemos dispersión anómala

Si $s < 0$

Scanned with CamScanner

T1 + T2 ⇒ 12 yers.

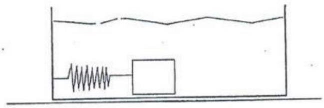
T3 ⇒ 6 yers.

RCD

Exame de Mecánica Clásica I (xaneiro de 2013)

T3 ~~1~~. Un corpo de masa $m = 12$ kg está unido por un resorte de constante $k = 53$ N/m á parede dun cubo con auga e somerxido nela. A auga exerce unha forza viscosa $-b\vec{v}$ sendo $\vec{v}$ a velocidade da masa relativa ao líquido e b unha constante positiva. A masa desprázase horizontalmente dende a súa posición de equilibrio 0,62 m e sóltase. a) Atopar a ecuación diferencial do movemento da masa m. b) Obter a solución e respresentala gráficamente. c) Dar a ecuación diferencial do movemento no caso de que o cubo de auga se mova periodicamente da forma $a \cos \omega t$.

RCD



RCD

T2 ~~2~~. Un corpo de masa m está fixo a un punto do borde interior dun anel de masa M que roda sen ? esvarar por unha mesa horizontal. a) Atopar mediante o formalismo de Lagrange a ecuación do movemento. b) Determinar a enerxía do sistema e estudiar cualitativamente o movemento segundo o valor da mesma. c) Escribir a ecuación do movemento para pequenas oscilacións e atopar a frecuencia de oscilación.

Que es lo que se pide aquí, exactamente ?

Axuda: Referir a posición das partículas ao punto O onde m contacta coa mesa. Considerar o anel equivalente a unha partícula de masa M situada no seu centro.

REPE

T3 ~~3~~. Tres partículas de masas iguais m móvense sobre un anel circular. As tres partículas están unidas entre sí por muelles iguais de contante k. Atopar as frecuencias propias e os modos propios.

RCD

4. A ecuación de ondas nun medio ven dada por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} = 0,$$

onde v e λ son constantes. Probando unha solución da forma $\psi = A \exp i(kx - \omega t)$ atopar a relación de dispersión. Calcular a velocidade de grupo e a de fase e debuxar ω como función de k. Tratáse dun medio dispersivo ou non dispersivo? A dispersión é normal ou anómala?

RCD

RCD

RCD

RCD

RCD

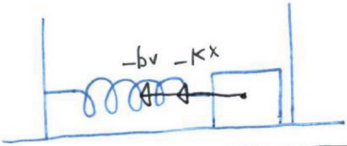
35

Scanned with CamScanner

Probe

EXAMEN FINAL MCI I/2013

Problema 1



Aplicamos la 2ª ley de Newton:

$$-bv - kx = m\frac{dV}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + w^2 x = 0$$

Donde hemos definido $\gamma = \frac{b}{2m}$, probamos $x = e^{\lambda t}$:

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + w_0^2 = 0$ luego:

$$\lambda = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4w_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}$$, Luego:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{(\sqrt{\gamma^2 - w_0^2})t} + B e^{-(\sqrt{\gamma^2 - w_0^2})t}\right]$$

Condiciones iniciales $\begin{cases} x(0) = 0'62 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

$$x'(t) = -\gamma e^{-\gamma t}\left[A e^{(\sqrt{\gamma^2 - w_0^2})t} + B e^{-(\sqrt{\gamma^2 - w_0^2})t}\right] + e^{-\gamma t}\sqrt{\gamma^2 - w_0^2} \cdot$$

$$\cdot\left[A e^{\sqrt{\gamma^2 - w_0}\,t} - B e^{-\sqrt{\gamma^2 - w_0}\,t}\right]$$

$$x'(0) = -\gamma A - \gamma B + \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}\,A - \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}\,B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}}\,A$$

Scanned with CamScanner

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t} + \frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} A e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

$$x(0) = 0'62$$

$$0'62 = A\left[1 + \frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{0'62}{\left[\frac{\cancel{\gamma}+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cancel{-\gamma}+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right]} = \frac{0'62\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}$$

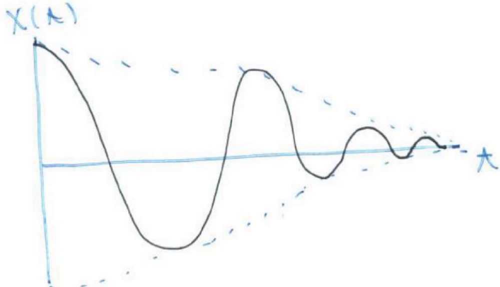
$$= 0'31\,\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}$$

$$x(t) = 0'31\,e^{-\gamma t}\left[\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\,e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t} + \frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\,e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0}\,t}\right]$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{53}{12}} \simeq 2'101\ s^{-1}$ //

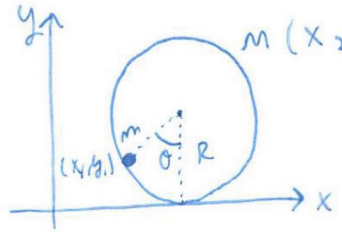
Existen 3 casos dependiendo del valor de b:

Si $\omega_0^2 > \gamma^2$ tenemos un oscilador infraamortiguado:



Scanned with CamScanner

Problema 2



2 Partículas en 2D

3 ligaduras $\begin{cases} y_2 = R \\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = R \\ X = \theta R \end{cases}$

1 grao de libertad, $q = \theta$

$$\begin{cases} x_1 = \theta R - R \operatorname{Sen}\theta \\ y_1 = R - R\cos\theta \\ x_2 = \theta R \\ y_2 = R \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot\theta R - R\dot\theta\cos\theta \\ \dot{y}_1 = R\dot\theta \operatorname{Sen}\theta \\ \dot{x}_2 = \dot\theta R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 = \dot\theta^2 R^2 + \dot\theta^2 R^2 \cos^2\theta - 2\dot\theta^2 R^2 \cos\theta \\ \dot{y}_1^2 = R^2\dot\theta^2 \operatorname{Sen}^2\theta \\ \dot{x}_2^2 = \dot\theta^2 R^2 \end{cases}$$

Por tanto

$$T = \frac{1}{2} m \left(2\dot\theta^2 R^2 (1-\cos\theta)\right) + 1/2\, M \dot\theta^2 R^2 =$$

$$= m \dot\theta^2 R^2 (1-\cos\theta) + 1/2\, M \dot\theta^2 R^2$$

$$V = mg y_1 + Mg y_2 = mg(R - R\cos\theta) + Mg R$$ Por tanto:

$$\boxed{L = m \dot\theta^2 R^2 (1-\cos\theta)) + 1/2\, M\dot\theta^2 R^2 - (M+m)g R + mg R \cos\theta}$$

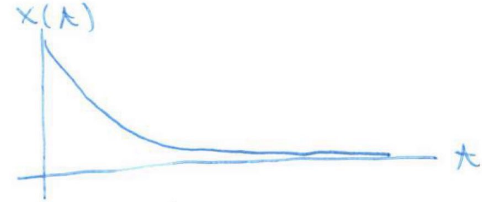
Vemos la ecuación de Euler-Lagrange para este caso:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg R \operatorname{Sen}\theta + m\dot\theta^2 R^2 \operatorname{Sen}\theta$$

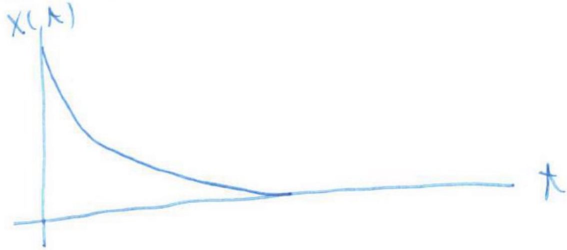
$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 2mR^2\dot\theta(1-\cos\theta) + MR^2\dot\theta$$

Scanned with CamScanner

Para $\gamma^2 = w_0^2$ tenemos amortiguamiento crítico:



Para $\gamma^2 > w_0^2$ tenemos un oscilador sobreamortiguado:



(c) Añadimos una fuerza $F(t) = d\cos(wt)$ [creo que es lo que pide]

La ecuación diferencial resultará:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = d\cos(wt)}$$

Scanned with CamScanner

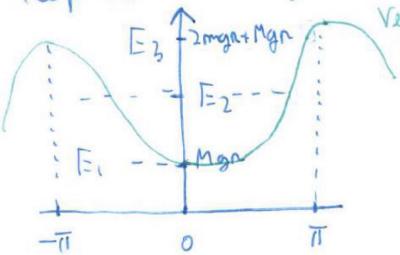
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 2mR^2\ddot\theta\,(1-\cos\theta) + 2mR^2\dot\theta^2 \sin\theta + MR^2\ddot\theta$$

Luego:

$$\boxed{\ddot\theta\left[MR^2 + 2mR^2(1-\cos\theta)\right] + \cancel{2}mR^2\dot\theta^2\sin\theta = \cancel{m\dot\theta^2R^2\sin\theta} - mgR\sin\theta}$$

(b) $$E = T + V = \underbrace{m\dot\theta^2R^2(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}M\dot\theta^2R^2}_{T(\dot\theta^2,\theta)\,\geq\,0} + \underbrace{(M+m)gR - mgR\cos\theta}_{V_{ef}(\theta)}$$

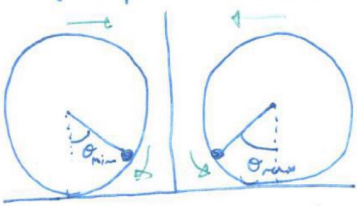
Representamos $V_{ef}(\theta)$



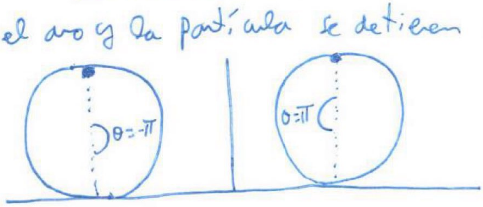
El sistema solo puede estar en aquellos θ tales que $E(\theta) \geq V_{ef}(\theta)$, Por lo que tenemos 3 casos

si $E=E_1$, el aro y el círculo están detenidos en $x=0$.

Si $E=E_2$, el aro y la partícula oscilan con $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$



Si $E=E_3$, el aro y la partícula se detienen en $\theta = \pm\pi$:



(Equilibrio inestable

Si $E > E_3$ la partícula y el aro giran hacia $\pm\infty$.

Scanned with CamScanner

Vemos las oscilaciones en torno a $\theta = 0$ (Punto de equilibrio estable). Usando un desarrollo de Taylor de $V_{ef}(\theta)$:

$$V \simeq V_{ef}(0) + \cancel{\frac{dV_{ef}}{d\theta}\Big|_0 (\theta)}^{\,0} + \frac{d^2V_{ef}}{d\theta^2}\Big|_0 \frac{1}{2}\theta^2$$

y también: $V_{ef} = E_0 + \frac{1}{2} k R^2 (\theta)^2$

Por lo que $\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgR\cos\theta$, $\frac{d^2V}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} = mgR$

Por lo que $\omega = \sqrt{g/R}$

Pequeñas oscilaciones en torno a $\theta = 0 \Rightarrow$ $1 - \cos\theta \simeq 0$

$\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

Por lo que la ecuación resulta: $\dot{\theta}^2 \simeq 0$

$$[M + 2m(1-\cos\theta)]\ddot{\theta} + m\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}^2 + m\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$M\ddot{\theta} + m\frac{g}{R}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{m}{M}\frac{g}{R}\theta$$ Péndulo simple

Con $\omega^2 = \frac{m}{M}\frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{m}{M}\frac{g}{R}}}$

Scanned with CamScanner

Exame de Mecánica Clásica I (Xaneiro 2014)
(con solucións)

1. Unha masa m con velocidade v_0 na orixe de coordenadas móvese polo eixo x sometido a unha forza de rozamento $F = -b\,v^\alpha$, sendo b unha constante e v a velocidade. Calcular a distancia recorrida para os casos $\alpha = 1,\ 3/2$, e 2. Representar gráficamente a velocidade e a distancia en función do tempo e comparar os resultados. (También cayó en Junio 2017)

Resultados:

$$\alpha=1 \qquad v=v_0\, e^{-\frac{b}{m}t} \qquad x=\frac{m\,v_0}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right) \qquad d=\frac{m\,v_0}{b}$$

$$\alpha=3/2 \qquad v=\frac{v_0}{\left(1+\frac{b\sqrt{v_0}}{2m}\,t\right)^2} \qquad x=\frac{v_0\,t}{1+\frac{b\sqrt{v_0}}{2m}\,t} \qquad d=\frac{2\,m\,\sqrt{v_0}}{b}$$

$$\alpha=2 \qquad v=\frac{v_0}{1+\frac{b\,v_0}{m}\,t} \qquad x=\frac{m}{b}\ln\left(1+\frac{b\,v_0}{m}\,t\right) \qquad d=\infty$$

(Casos $\alpha=1,2$ Parcial 2018)

2. Un bloque de masa m esvara sen rozamento sobre un plano inclinado de ángulo θ e masa M. O plano inclinado atópase sobre unha mesa horizontal lisa. Estando as dúas masas inicialmente en repouso, o bloque sóltase dende a parte superior da cara inclinada de lonxitude l. a) Identificar os graos de liberdade e as coordenadas xeneralizadas. b) Escribir a función de Lagrange do sistema e discutir a existencia de coordenadas cíclicas e cantidades conservadas. c) Atopar as ecuacións diferenciais do movemento. d) Calcular a aceleración do plano inclinado e o tempo que tarda m en chegar abaixo.

Resultados: b) $L = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(m+M)\dot{q}_2^2 + m\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\theta + mgq_1\sin\theta$. q_1 é a posición de m respecto do borde superior do plano inclinado e q_2 a do plano inclinado. d) $t^2 = \frac{2l}{g\sin\theta}\left(1-\frac{m\cos\theta^2}{m+M}\right)$.

3. Dúas masas iguais m están unidas a sendos resortes de masa desprezable e constante k. Entre eles se coloca outro resorte de constante k_{12}. (a) Atopar as frecuencias propias e os modos propios. (b) Engádese un amortecedor de constante b a cada masa. Calcular as frecuencias propias e o coeficiente de extinción.

Resultados: a) $\omega_+^2 = k/m$ e proporción de amplitudes (1 1); $\omega_-^2 = (k+2k_{12})/m$ e (1 -1). b) $\tilde{\omega}_\pm^2 = \omega_\pm^2 - \gamma^2$, $\gamma = b/(2m)$ e as mesmas proporcións de amplitudes que no caso anterior sen rozamento.

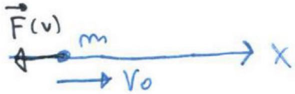
4. Unha corda de lonxitude L ten os dous extremos unidos a sendos aneis de masa desprezable que se moven por barras ríxidas sen rozamento. Calcular os modos de oscilación, as frecuencias e as lonxitudes de onda permitidas. Compárese co caso dunha corda cos extremos fixos.

Scanned with CamScanner

EXAMEN FINAL MCI I/2014

Problema 1

$$F(v) = -bv^{\alpha}$$



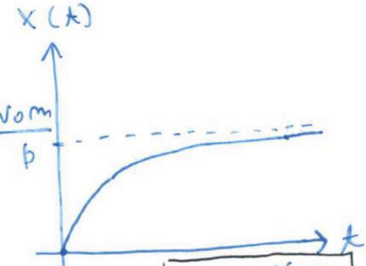
→ Caso $\alpha = 1$, Segunda ley de Newton $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$

$$-bv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{b}{m}\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} \Rightarrow -\frac{b}{m}t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) =$$

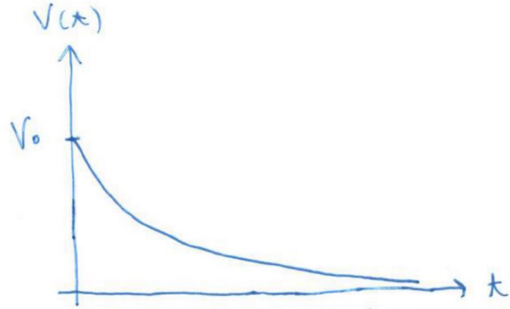
$$\Rightarrow \boxed{v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}} \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow \int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-\frac{b}{m}t}\, dt$$

$$\Rightarrow x = v_0\left[e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right]\left(-\frac{m}{b}\right) \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0 m}{b}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right]}$$

Representamos:



$x(0) = 0$, $\boxed{x(\infty) = \frac{v_0 m}{b}}$



$v(0) = v_0$ $\quad v(\infty) = 0$

→ Caso $\alpha = 3/2$

$$-bv^{3/2} = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{b}{m}\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} v^{-3/2}\, dv \Rightarrow +\frac{b}{m}t = +2v^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{m}t = 2\left[\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v_0}}\right] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v_0}} + \frac{b}{2m}t \Rightarrow v = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{v_0}} + \frac{b}{2m}t\right)^2}$$

Scanned with CamScanner

$$\boxed{V = \frac{V_0}{\left(1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t\right)^2}} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{\left(1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{V_0\, dt}{\left(1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t\right)^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{2m\sqrt{V_0}}{b}\int \frac{du}{u^2} \Rightarrow$$

$$u = 1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t$$

$$du = \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}dt$$

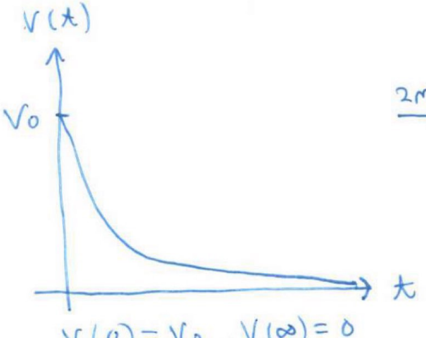
$$\Rightarrow x = \frac{2m\sqrt{V_0}}{b}\left[-\frac{1}{u}\right] = \frac{2m\sqrt{V_0}}{b}\left[-\frac{1}{1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{2m\sqrt{V_0}}{b}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t}\right] \Rightarrow$$

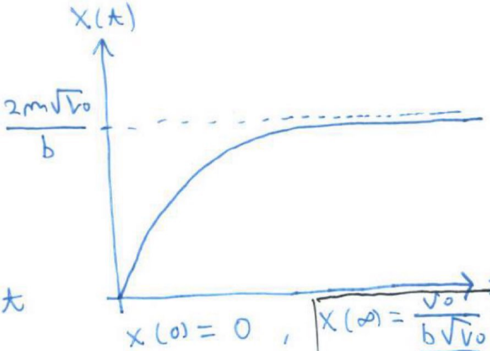
$$\Rightarrow X(t) = \frac{\cancel{2m\sqrt{V_0}}}{\cancel{b}}\left[\frac{\cancel{1} + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t - \cancel{1}}{1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = \frac{V_0 t}{1 + \frac{b\sqrt{V_0}}{2m}t}}$$

Representamos:



$V(0) = V_0 \ , \ V(\infty) = 0$



$x(0) = 0 \ , \ \boxed{X(\infty) = \frac{V_0}{\frac{b\sqrt{V_0}}{2m}} = \frac{2m\sqrt{V_0}}{b}}$

Scanned with CamScanner

→ Caso $\alpha = 2$

$$-bv^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{b}{m}\int_0^t dt = \int v^{-2}dv \Rightarrow +\frac{b}{m}t = + \left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{b}{m}t \Rightarrow \boxed{v = \frac{v_0 m}{m + bv_0 t}}$$

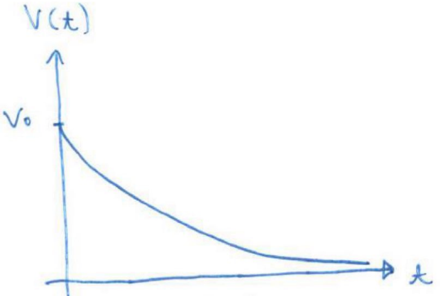
$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0 m}{m + bv_0 t} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0 m}{m + bv_0 t}dt = \frac{m}{b}\int \frac{du}{u} \Rightarrow$$

$u = m + bv_0 t$

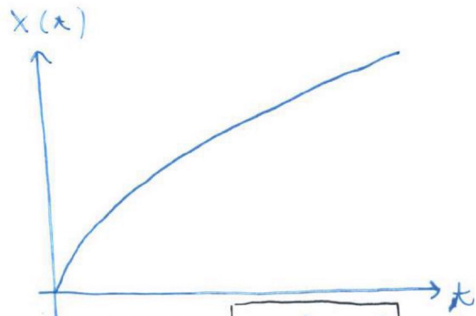
$du = bv_0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{m}{b}\ln(u) = \frac{m}{b}\ln(m + bv_0 t)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{bv_0 t}{m}\right)}$$ Representamos:



$v(0) = v_0$, $v(\infty) = 0$

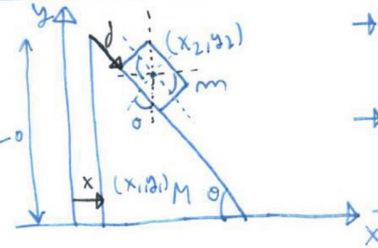


$x(0) = 0$, $\boxed{x(\infty) = \infty}$

→ En los otros casos la partícula se acababa deteniendo, pero en este último la fuerza al depender de v^2 se hace muy pequeña y no acaba de frenar la partícula //

Scanned with CamScanner

Problema 2 (mesa horizontal lisa, sin rozamiento)



→ 2 masas en 2 dimensiones 4 coordenadas
$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

→ 2 ligaduras, $y_1 = 0$ //
(el bloque se mueve sobre la pendiente)

→ 2 grados de libertad.

Tomaremos como coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = d$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \\ x_2 = x + d\cos\theta \\ y_2 = L_0 - d\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 = \dot{x} + \dot{d}\cos\theta \\ \dot{y}_2 = -\dot{d}\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^2 = \dot{x}^2 \\ \dot{x}_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{d}^2\cos^2\theta + 2\dot{x}\dot{d}\cos\theta \\ \dot{y}_2^2 = \dot{d}^2\sin^2\theta \end{cases}$$

Por tanto $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{d}^2 + 2\dot{x}\dot{d}\cos\theta) + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$V = mg\,y_2 = mgL_0 - mgd\sin\theta$, luego:

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{d}^2 + m\dot{x}\dot{d}\cos\theta - mgL_0 + mgd\sin\theta}$$

→ Calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

(x) Ecuación de X:

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ X es coordenada cíclica, $P_x = cte$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{(m+M)\dot{x} + \dot{d}m\cos\theta = cte = P_x}$$

Scanned with CamScanner

(d) Ecuación para d:

$$\frac{\partial L}{\partial d} = mg \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = m\dot{d} + m\dot{x}\cos\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) = m\ddot{d} + m\ddot{x}\cos\theta$$

Luego: $\cancel{m}g \operatorname{sen}\theta = \cancel{m}\ddot{d} + \cancel{m}\ddot{x}\cos\theta$

$$\boxed{g \operatorname{sen}\theta = \ddot{d} + \ddot{x}\cos\theta}$$

→ Vamos a ver el Hamiltoniano. Luego:

$$-\frac{dH}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{H = cte \Rightarrow \text{Se conserva}}$$

Además como las relaciones entre coordenadas no dependen de t, se cumple que $\boxed{H = E = cte}$

$$\boxed{E = H = T + V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{d}^2 + m\dot{x}\dot{d}\cos\theta + mgL_0 - mgd\operatorname{sen}\theta}$$

→ Calculamos ahora la aceleración del plano y el tiempo que tarda en llegar abajo.

de la ecuación de (x): $(m+M)\dot{x} + \dot{d}m\cos\theta = cte$

derivamos: $(M+m)\ddot{x} + \ddot{d}m\cos\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{\ddot{d}m\cos\theta}{M+m}}$$, Ahora de la ecuación de (d):

$\ddot{d} = -\ddot{x}\cos\theta + g\operatorname{sen}\theta$, sustituyendo en $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{x}m\cos^2\theta}{M+m} - \frac{gm\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{M+m} \Rightarrow \ddot{x}\left(\frac{m\cos^2\theta}{M+m} - 1\right) = \frac{gm\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{M+m}$$

Scanned with CamScanner

$$\ddot{x} = \frac{\left(\frac{m g \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cancel{M+m}}\right)}{\left(\frac{M+m(1-\cos^2\theta)}{\cancel{M+m}}\right)} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{-m g \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{M + m \operatorname{sen}^2\theta}}$$

Ahora para obtener el tiempo buscamos $l(t)$, para ello sustituimos $\dot{x}$ (Integrando) en la ecuación de $\dot{X}$:

$$\int_0^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_0^t \frac{-m g \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{M + m \operatorname{sen}^2\theta} dt \Rightarrow \dot{x} = \frac{-m g \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{M + m \operatorname{sen}^2\theta} t$$

$$(m+M)\frac{-m g \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{M + m \operatorname{sen}^2\theta} t + \dot{l} m \cos\theta = 0 \quad \text{(Suponemos cte = 0)}$$

$$\Rightarrow \dot{l}(t) = \frac{(M+m)}{\cancel{m}\cancel{\cos\theta}} \frac{\cancel{m} g \cancel{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta}{M + m \operatorname{sen}^2\theta} t = \frac{(M+m)\operatorname{sen}\theta\, g}{M + m \operatorname{sen}^2\theta} t$$

$$\int_0^{L_0 \operatorname{sen}\theta = l_0} dx = \frac{(M+m)\operatorname{sen}\theta\, g}{(M + m \operatorname{sen}^2\theta)} t\, dt \Rightarrow l_0 = \frac{(M+m)\operatorname{sen}\theta\, g}{2(M + m \operatorname{sen}^2\theta)} t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2 l_0 (M + m \operatorname{sen}^2\theta)}{(M+m) g \operatorname{sen}\theta} = \frac{2 l_0}{g \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{M + m(1-\cos^2\theta)}{m+M}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{t^2 = \frac{2 l_0}{g \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{M+m}{M+m} - \frac{m \cos^2\theta}{M+m}\right) = \frac{2 l_0}{g \operatorname{sen}\theta}\left(1 - \frac{m \cos^2\theta}{M+m}\right)}$$

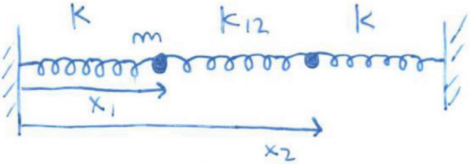
Scanned with CamScanner

Problema 3

2 Partículas en 1D.

2 coordenadas generalizadas

$q_1 = x_1 \ , \ q_2 = x_2$



$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) \ , \quad \{m\} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$

$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k x_1 - k_{12}(x_2 - x_1) \qquad A_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = k + k_{12}$

$A_{12} = A_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = -k_{12}$

$\frac{\partial V}{\partial x_2} = k x_2 + k_{12}(x_2 - x_1)$

$A_{22} = k + k_{12}$

Luego $\{A\} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$

→ Calculamos las frecuencias de oscilación $\det\left[\{A\} - \omega^2 \{m\} \right]$

$\begin{vmatrix} k + k_{12} - \omega^2 m & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \iff (k + k_{12} - \omega^2 m)^2 = k_{12}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k + k_{12} - \omega^2 m = \pm k_{12}$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} \end{aligned}}$$

Calculamos los autovectores:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \ , \quad \left[\{A\} - \omega_i^2 \{m\} \right] \vec{a}_i = 0$

Scanned with CamScanner

Modo 1 $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$:

$$\begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_1 = a_2 \\ \vec{a} = (a, a) \end{matrix}$$

Modo 2 $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$ $\vec{b} = (b_1, b_2)$

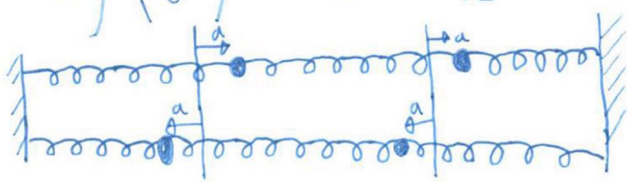
$$\begin{pmatrix} -k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & -k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b_1 = -b_2 \\ \vec{b} = (b, -b) \end{matrix}$$

→ Vemos como funcionam estos modos:

Modo 1 M_1 vibra, $M_2 = 0$, $\omega = \omega_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = a M_1 \\ x_2 = a M_2 \end{matrix}$$

Modo "simétrico"

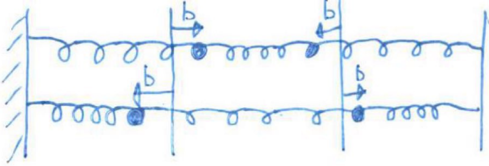


Modo 2 $M_1 = 0$, M_2 vibra, $\omega = \omega_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = b M_2 \\ x_2 = -b M_2 \end{matrix}$$

Scanned with CamScanner

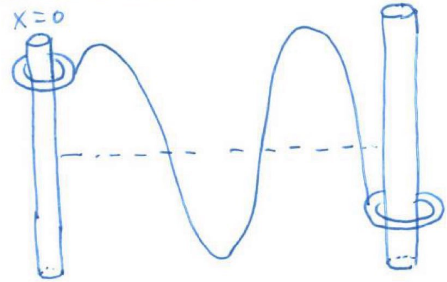
Modo "antisimétrico"



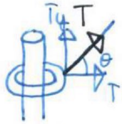
(b) La frecuencia de un oscilador amortiguado viene dada por $w^2 = w_0^2 - \gamma^2$, donde $\gamma = \frac{b}{2m}$, luego las frecuencias de este oscilador amortiguado serán:

$$\boxed{w_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}} \qquad \boxed{w_2 = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

Problema 4



Veamos las condiciones de contorno del problema:



Utilizando la 2ª ley de Newton:

$T_y = T\,\text{sen}\,\theta = m\,a_y \simeq 0 \Rightarrow T\,\text{sen}\,\theta \simeq 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta \simeq 0 \Rightarrow \theta \ll 1$

con esta aproximación: $\text{sen}\,\theta \simeq \text{tg}\,\theta$ ya que $\text{tg}\,\theta \simeq \frac{\text{sen}\,\theta}{\underset{\cos\theta \simeq 1}{\cos\theta}} \simeq \text{sen}\,\theta$

y la $\text{tg}\,\theta$ es la pendiente de la recta tg a la cuerda en $x=0$, que también será la derivada, en concreto: $\text{tg}\,\theta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$

Por lo que las condiciones de contorno son:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

Probamos una solución: $u(x,t) = A e^{i(\omega t + kx)} + B e^{i(\omega t - kx)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A i k e^{i(kx+\omega t)} - B i k e^{i(-kx+\omega t)}$$

Aplicamos las C.C:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = A i k e^{i\omega t} - B i k e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow \boxed{A = B}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = A i k e^{i\omega t}\left[e^{ikL} - e^{-ikL}\right) = 0$$

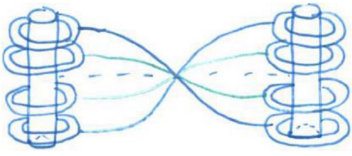
Para evitar tener la solución trivial $e^{ikL} = e^{-ikL} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{2ikL} = 1 \Rightarrow k = \frac{m\pi}{L}, \; m = 1, 2, \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_m = \frac{2\pi L}{m\pi} = \frac{2L}{m}, \; m = 1, 2 \dots}$ Vemos 3 modos de oscilación

$\lambda_1 = 2L$

$L = \lambda_1/2$

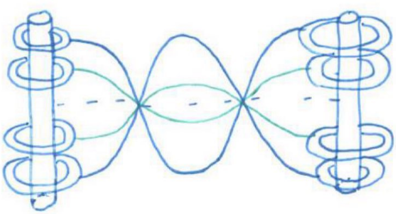


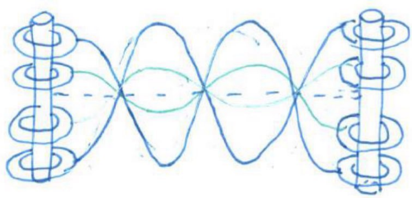
$\lambda_2 = L$

$L = \lambda_2$

$\lambda_3 = \frac{2L}{3}$

$L = \frac{3}{2}\lambda_3$



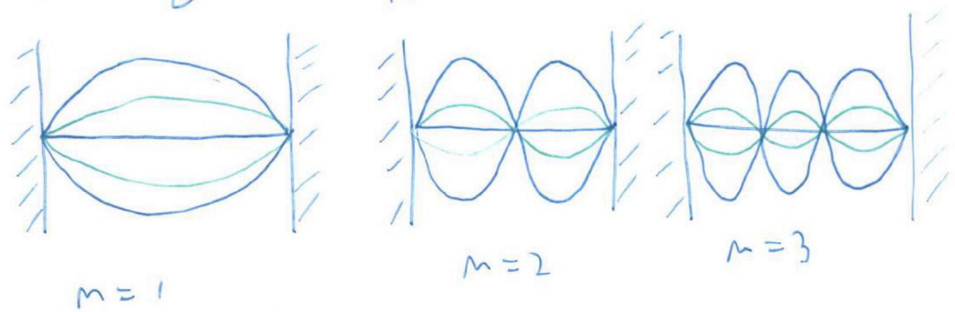


Scanned with CamScanner

La cuerda con los extremos fijos tiene por condiciones $u(0,t)=u(L,t)=0 \quad \forall t$, Luego:

$u(0,t)=0 \Rightarrow \boxed{A=-B}$, $u(L,t)=Ae^{i\omega t}\left[e^{ikL}-e^{-ikL}\right]=$

$\Rightarrow k=\frac{m\pi}{L} \Rightarrow \lambda_m=\frac{2L}{m}$ Pero en esta ocasión:



La diferencia está en que hemos aproximado $\theta \ll 1$ y la cuerda debe salir perpendicular al aro, además de que éste permite el movimiento de la cuerda, por esa razón tenemos vientres en los extremos, en lugar de nodos como en este caso.

Scanned with CamScanner

Exame de Mecánica Clásica I (Xuño 2014)

1. Unha pelota de praia de masa m lánzase verticalmente cara arriba cunha velocidade v_0. Se a forza de rozamento co aire é $F = -m\alpha v$, con α constante, cal é a velocidade final da pelota v_f cando cae ao chan? (expresalo en función de v_0, e α e g). Lévalle máis ou menos tempo facer o percorrido no aire que no valeiro? Xustifica o resultado obtido.

2. Unha masa m que se move sen rozamento sobre unha mesa horizontal está conectada por unha corda que pasa por un burato a outra masa M que colga por debaixo da mesa. Supor que M se move unicamente na dirección vertical e que a corda que colga permanece estirada en todo momento.

a) Escribir a función de Lagrange en función das coordenadas xeneralizadas. Cantos graos de liberdade ten o sistema?

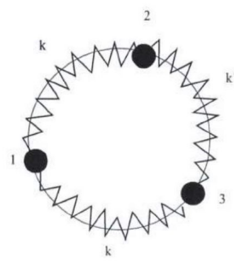
d) Discutir a existencia de coordenadas cíclicas e cantidades conservadas no movemento.

c) Atopar a ecuación diferencial do movemento.

d) Discutir os tipos de movemento en base ao potencial efectivo unidimensional. Baixo que condicións m realiza un movemento circular?

e) Atopar a frecuencia de pequenas oscilacións na variable r ao redor do movemento circular.

3. Tres partículas de masas iguais están unidas por resortes de constantes k, k e k', como se amosa na figura. Calcular as frecuencias propias e os modos propios. Cales son as frecuencias propias se k' se pode poñer como $k' = k + \delta k$ onde $\delta k \ll k$? A partícula 1 desprazáse unha distancia x_0 da súa posición de equilibrio e sóltase en repouso. Calcular o movemento resultante.



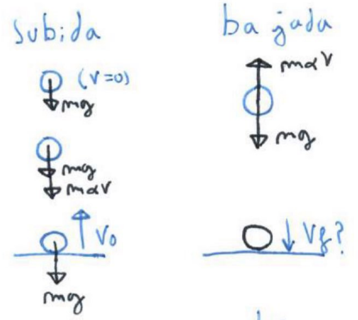
4. Unha corda de lonxitude L ten os seus dous extremos fixos en $x = 0$ é en $x = L$. No instante $t = 0$ a corda está na posición de equilibrio e se lle dá unha velocidade inicial $v(t = 0, x) = v_0 x/L(1 - x/L)$. Calcular (1) a velocidade de cada punto da corda como función do tempo e (2) a posición como función do tempo. (3) Cal é a enerxía da corda?

Scanned with CamScanner

EXAMEN FINAL MCI VI/2014

Problema 1

$F_{roz} = -m\alpha V$, $\alpha = cte$



Aplicando la 2ª ley de Newton:

$$\begin{cases} -mg - m\alpha V = ma & \text{subida} \\ -mg + m\alpha V = m(-a) & \text{bajada} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -g - \alpha V = \dfrac{dV}{dt} \\ g - \alpha V = \dfrac{dV}{dt} \end{cases}$$

Buscamos ahora V_{ter}, que es aquella para la cual $F_{roz} = F_g$ y $a = 0$.

$$g - \alpha V = 0 \Rightarrow V_{ter} = g/\alpha$$

Podemos escribir las expresiones incluyendo V_{ter}

$$\begin{cases} -\alpha(V_{ter}+V) = \dfrac{dV}{dt} \\ \alpha(V_{ter}-V) = \dfrac{dV}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha(V_{ter}+V) = \dfrac{dV}{dy}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dV}{dy}V \\ \alpha(V_{ter}-V) = \dfrac{dV}{dy}\left(-\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{dV}{dy}V \end{cases}$$

Subida

$$-\alpha(V_{ter}+V) = \frac{dV}{dy}V \Rightarrow -\alpha\int^{h} dy = \int_{V_0}^{0} \frac{V}{V_{ter}+V}\,dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha h = \int_{V_0}^{0} \frac{V+V_{ter}}{V_{ter}+V}\,dV - \int_{V_0}^{0} \frac{V_{ter}}{V_{ter}+V}\,dV = -V_0 - V_{ter}\left[\ln\left(\frac{1}{V_{ter}}\right) - \ln\left(\frac{1}{V+V_{ter}}\right.\right.$$

$$\alpha h = V_0 + V_{ter} \ln\left(\frac{V_{ter} + V_0}{V_{ter}}\right)$$

Bajada

$$\alpha(V_{ter} - V) = -\frac{dV}{dy} V \Rightarrow \alpha \int_h^0 dy = \int_0^{V_f} \frac{V}{V - V_{ter}} dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha h = \int_0^{V_f} \frac{V - V_{ter}}{V - V_{ter}} dV + V_{ter} \int_0^{V_f} \frac{1}{V - V_{ter}} dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha h = V_f + V_{ter} \ln\left(\frac{V_{ter}}{V_{ter} - V_f}\right)$$

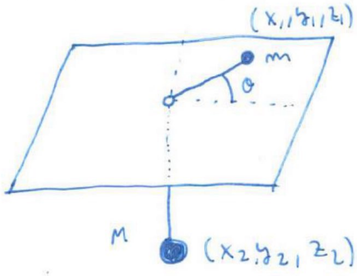
Y si igualamos:

$$\boxed{V_0 + V_{ter} \ln\left(\frac{V_{ter} + V_0}{V_{ter}}\right) = V_f + V_{ter} \ln\left(\frac{V_{ter}}{V_{ter} - V_f}\right)}$$

Llegamos a una ecuación trascendente de donde no podemos despejar V_f. Por otro lado parece claro que sin una fuerza de rozamiento el recorrido lo hará más rapido, pues una fuerza de rozamiento como esta reduce

Scanned with CamScanner

Problema 2



2 Partículas em 3D

4 ligaduras $\begin{cases} z_1 = 0 \\ x_2 = 0, \quad L = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + z_2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

2 Grados de libertad, 2 coordenadas generalizadas $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \end{cases}$

Luego:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ y_1 = r\,\text{sen}\theta \\ z_2 = -(L - r) \end{cases}$$

Si no ponemos el ⊖ el sistema funcionaría como si cayese hacia arriba. Le ponemos el − para que si $r = 0$ $z = -L$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\text{sen}\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\,\text{sen}\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\,\text{sen}\theta \\ \dot{y}^2 = \dot{r}^2\,\text{sen}^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\,\text{sen}\theta \\ \dot{z}^2 = \dot{r}^2 \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Por tanto: $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2$

$V = Mgz_2 = -MgL + Mgr$, el Lagrangiano pues será:

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + MgL - Mgr}$$

Scanned with CamScanner

→ Ecuación de Euler Lagrange para θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \theta \text{ es coordenada cíclica. } P_\theta = cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \boxed{P_\theta = m r^2 \dot\theta = cte}$$

→ Ecuación de Euler Lagrange para r:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot\theta^2 - Mg \qquad \boxed{(m+M)\ddot r = \underbrace{m r \dot\theta^2}_{F_{centrípeta}} \underbrace{- Mg}_{Peso}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = (m+M)\dot r \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = (m+M)\ddot r$$

→ Vemos el Hamiltoniano, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = -\frac{dH}{dt} \Rightarrow \boxed{H = cte}$,
Además como las coordenadas no dependen de t, $\boxed{H = E = cte}$
la energía se conserva:

$$\boxed{E = T + V = \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2) + \frac{1}{2} M \dot r^2 + Mgr - MgL = H}$$

→ Construimos el potencial unidimensional:

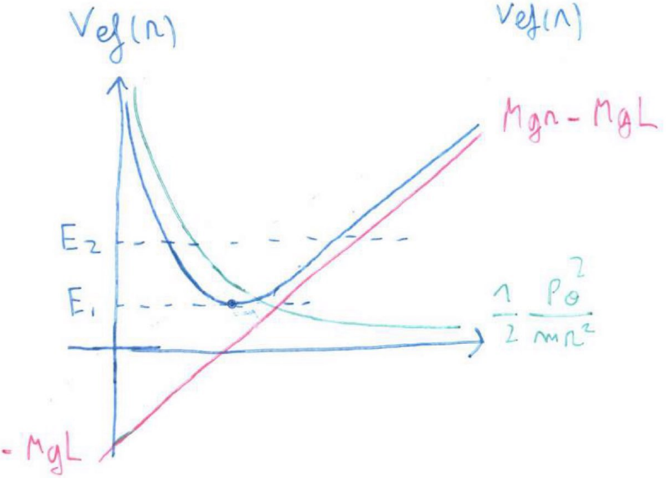
$$\dot\theta = \frac{P_\theta}{m r^2} \quad , \text{ Lo sustituimos en } E:$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot r^2 + \frac{1}{2} \frac{P_\theta^2}{m r^2} + \frac{1}{2} M \dot r^2 + Mgr - MgL$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}(m+M)\dot r^2}_{T(\dot r) \geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{m r^2} + Mgr - MgL}_{V_{efe}(r)}$$

Scanned with CamScanner

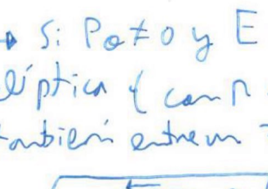
Representando:



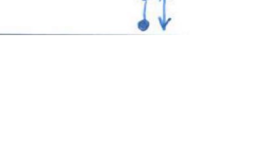
La partícula solo se puede mover en aquellos r tales que $E(r) \geq V_{ef}(r)$.
Por tanto hay tres casos:

→ Si $P_\theta = 0$ y $E = E_1$ o $E = E_2$, la partícula desciende hasta $r = 0$, su gráfica del potencial sería la curva en rojo de la anterior. (No rota, pues si $P_\theta = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = cte$)

→ Si $P_\theta \neq 0$ y $E = E_1$ la partícula rota con un valor de $r = r_0$ la masa M está detenida.



→ Si $P_\theta \neq 0$ y $E = E_2$ la partícula rota con una trayectoria elíptica (con $r \in [r_{min}, r_{max}]$) y la masa M sube y baja también entre un z_{min} y un z_{max}:



Scanned with CamScanner

Calculamos la frecuencia de las pequeñas oscilaciones, para ello utilizamos un desarrollo de Taylor:

$$V_{ef}(r) \simeq V_{ef}(r_0) + \cancel{\left.\frac{dV_{ef}}{dr}\right|_{r=r_0}}^{\,0}(r-r_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2V_{ef}(r_0)}{dr^2}(r-r_0)^2$$

Calculamos r_0:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = -\frac{P_\theta^2}{mr^3} + mg \Rightarrow r_0^3 = \frac{P_\theta^2}{m^2 g} \quad //$$

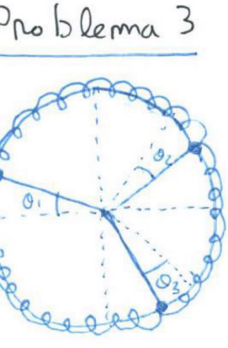
Además un potencial lo podemos escribir como:

$$V_{ef}(r) = E_0 + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2 \quad \text{Luego:}$$

$$k = w^2 m = \left.\frac{d^2 V_{ef}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{3P_\theta^2}{mr^4}\right|_{r=r_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{w^2 = \frac{3P_\theta^2}{m\left(\sqrt[3]{\frac{P_\theta^2}{m^2 g}}\right)^4}}$$

Problema 3



3 Partículas en 2D. 3 ligaduras (todas en el círculo), 3 grados de libertad:

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2, \quad q_3 = \theta_3$$

$$T = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$$

(Para estos problemas es siempre así)

Scanned with CamScanner

Luego $\{m\} = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{1}{2}kr^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}k'r^2(\theta_3 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}kr^2(\theta_1 - \theta_3)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -kr^2(\theta_2 - \theta_1) + kr^2(\theta_1 - \theta_3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = kr^2(\theta_2 - \theta_1) - k'r^2(\theta_3 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_3} = k'r^2(\theta_3 - \theta_2) - kr^2(\theta_1 - \theta_3)$$

$$A_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = 2kr^2 \quad A_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = kr^2 + k'r^2 \quad A_{33} = kr^2 + k'r^2$$

$$A_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = -kr^2 \quad A_{13} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} = -kr^2 \quad A_{23} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} = -k'r^2$$

Luego $\{A\} = \begin{pmatrix} 2kr^2 & -kr^2 & -kr^2 \\ -kr^2 & kr^2 + k'r^2 & -k'r^2 \\ -kr^2 & -k'r^2 & kr^2 + k'r^2 \end{pmatrix}$

→ Calculamos las frecuencias de oscilación: $\det[\{A\} - \omega^2\{m\}] = 0$

$$r^2 \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k & -k \\ -k & k + k' - \omega^2 m & -k' \\ -k & -k' & k + k' - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with CamScanner

$$(2k-w^2m)\left[(k+k-w^2m)^2-k'^2\right]+k\left(-k\left(k'+k-w^2m\right)-kk'\right)$$
$$-k\left(kk'+k\left(k'+k-w^2m\right)\right)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2k-w^2m)\left[\cancel{k'^2}-\cancel{k'^2}+(k-w^2m)^2+2k'(k-w^2m)\right]-$$
$$-2k^2\left(2k'+k-w^2m\right)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2k-w^2m)(k-w^2m)\left[k-w^2m+2k'\right]-2k^2\left(k-w^2m+2k'\right)=0$$

Sacando factor común $(k-w^2m+2k')$ luego:

$$k-w^2m+2k'=0 \Rightarrow \boxed{w_3=\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}}$$

$$(2k-w^2m)(k-w^2m)-2k^2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{2k^2}-2kw^2m-kw^2m+w^4m^2-\cancel{2k^2}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w^4m-3kw^2m=0 \quad \begin{cases} \boxed{w_0=0} \\ \boxed{w_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}} \end{cases}$$

Buscamos los autovectores del problema $\left[\{A\}-w_i\{m\}\right]\vec{a}_i=0$

Para $\underline{w_0=0}$ tenemos $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & k'+k & -k' \\ -k & -k' & k'+k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando Gauss:
$$\begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & k'+k & -k' \\ -k & -k' & k'+k \end{pmatrix}\xrightarrow[2F_3+F_1]{2F_2+F_1}\begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ 0 & 2k'+k & -k-2k' \\ 0 & -2k'-k & 2k'+k \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Por lo que:

$$(2k'+k)\, a_2 = (2k'+k)\, a_3 \Rightarrow \boxed{a_2 = a_3} \qquad \vec{a} = (a, a, a)$$

$$y \quad 2k a_1 - k a_2 - k a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = a_2}$$

Para $w = w_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{pmatrix} -k & -k & -k \\ -k & k'-2k & -k' \\ -k & -k' & k'-2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -k & -k & -k \\ -k & k'-2k & -k' \\ -k & -k' & k'-2k \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_3+F_1]{-2F_2+F_1} \begin{pmatrix} -k & -k & -k \\ 0 & k-k' & k'-k \\ 0 & k'-k & k-k' \end{pmatrix}$$

$$(k-k')\, b_2 = (k-k')\, b_3 \Rightarrow \boxed{b_2 = b_3}$$

$$-k b_1 - 2k\, b_2 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -2b_2} \qquad \vec{b} = (-2b, b, b)$$

Para $w_3 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{pmatrix} k-2k' & -k & -k \\ -k & -k' & -k' \\ -k & -k' & -k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (k-2k')\, c_1 - k c_2 - k c_3 &= 0 \\ -k c_1 - k' c_2 - k' c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad c_1 = \frac{k c_2 + k c_3}{k - 2k'} \qquad c_1 = \frac{-k' c_2 - k' c_3}{k}$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{kc_2+kc_3}{k-2k'}=\frac{-k'c_2-k'c_3}{k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2c_2+k^2c_3=-kk'c_2+2k'^2c_2+kk'c_3+2k'^2c_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2(k^2+kk'-2k'^2)=c_3(-k^2-kk'+2k'^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2=-c_3}\,,\quad \boxed{c_1=\frac{kc_2+kc_3}{k-2k'}=0}$$

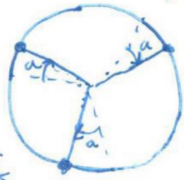
Luego $\vec{c}=(0,c,-c)$

→ Veamos como oscila el sistema en estos modos normales:

Modo 1 vibra M_1, $M_2=M_3=0$, $w=w_1=0$ //

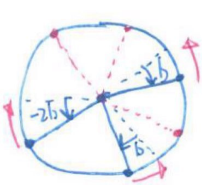
$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -2b & 0\\ a & b & c\\ a & b & -c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}\theta_1&=aM_1\\ \theta_2&=aM_2\\ \theta_3&=aM_3\end{aligned}$$

Tenemos una rotación del sistema :



Modo 2 vibra M_2, $M_1=M_3=0$, $w_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -2b & 0\\ a & b & c\\ a & b & -c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ M_2\\ 0\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}\theta_1&=-2bM_2\\ \theta_2&=bM_2\\ \theta_3&=bM_2\end{aligned}$$

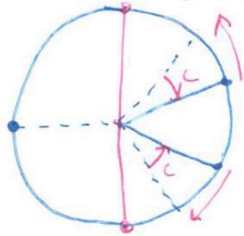


Scanned with CamScanner

Modo 3 vibra M_3, $M_1 = M_2 = 0$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{K+2K'}{m}}$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b & 0 \\ a & b & c \\ a & b & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \theta_1 &= 0 \\ \theta_2 &= cM_3 \\ \theta_3 &= -cM_3 \end{aligned}$$

Em este modo:



→ Si ponemos $k' = k + \delta k$ com $\delta k << K$ luego $K \simeq K'$, portanto $\omega_3 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} \simeq \sqrt{\frac{3k}{m}} = \omega_2$ por lo que únicamente pasamos a tener um modo de vibracóm com $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

→ Si desplazamos una distancia x_0 la partícula 1, temos que $\theta_1 = x_0/r$, por lo que:

$$\begin{cases} \theta_1 = a\cos(\omega_0 t + \delta_0) - 2b\cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \theta_2 = a\cos(\omega_0 t + \delta_0) + b\cos(\omega_1 t + \delta_1) + c\cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ \theta_3 = a\cos(\omega_0 t + \delta_0) + b\cos(\omega_1 t + \delta_1) + c\cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases}$$

Suponemos que $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0$ y llegamos a que para $t=0$:

$$\begin{cases} x_0/r = a - 2b \\ 0 = a + b + c \\ 0 = a + b - c \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = 0} \qquad \begin{cases} x_0/r = a - 2b \\ a + b = 0 \Rightarrow a = -b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0/r = 3a \Rightarrow \boxed{a = \frac{x_0}{3r}},\ \boxed{b = -\frac{x_0}{3r}}$$

Scanned with CamScanner

Por tanto el sistema se moverá:

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{x_0}{3n}\cos(w_0 t) + \frac{2x_0}{3n}\cos(w_1 t) \\ \theta_2 &= \frac{x_0}{3n}\cos(w_0 t) - \frac{x_0}{3n}\cos(w_1 t) \\ \theta_3 &= \frac{x_0}{3n}\cos(w_0 t) - \frac{x_0}{3n}\cos(w_1 t) \end{aligned}}$$

Problema 4

extremos fijos $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$ (Condiciones de contorno)

Condición inical: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{V_0 x}{L(1-x/L)}$

Scanned with CamScanner

EXAMEN FINAL MC I — I/2017

Si F es una fuerza dependiente del tiempo $F = A - Bt$ donde A y B son ctes positivas:

(a) Determinar la velocidad $v(t)$ y la trayectoria $x(t)$ en términos de A, B, m, v_0, x_0

(b) Representar gráficamente $F(t)$, $V(t)$, $X(t)$ para $V_0 = 0$ y $x_0 > 0$.

(c) Describir brevemente el movimiento de la partícula.

Aplicando la 2ª ley de Newton $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$:

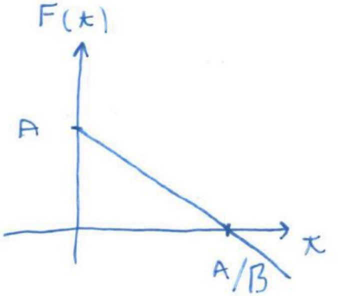
$$A - Bt = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t A - Bt \, dt = m\int_{v_0}^{v} dv \Rightarrow$$

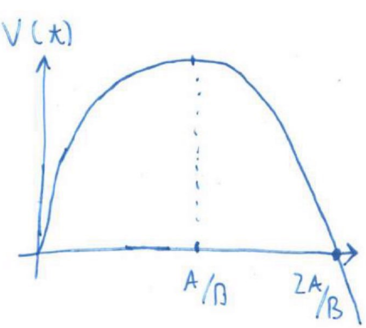
$$\Rightarrow At - \frac{B}{2}t^2 = m(v - v_0) \Rightarrow \boxed{V(t) = \frac{1}{m}\left[At - \frac{B}{2}t^2\right] + V_0}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\left[At - \frac{B}{2}t\right] + V_0 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \frac{1}{m}\int_0^t At - \frac{B}{2}t^2 \, dt + \int_0^t V_0 \, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x = X_0 + V_0 t + \frac{A}{2m}t^2 - \frac{B}{6m}t^3}$$

(b) Si representamos:

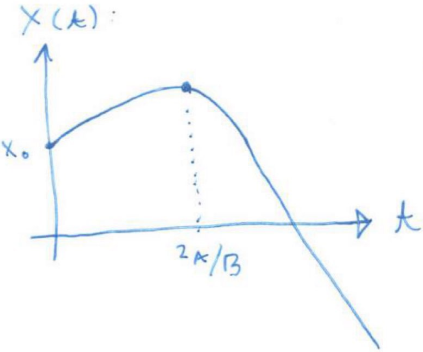




Buscamos un extremo de $x(t)$:

$$\frac{A}{m}t - \frac{B}{2m}t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \quad o \quad \frac{A}{m} - \frac{B}{2m}t = 0 \Rightarrow t = \frac{2A}{B}$$

$x(0) = x_0$, , $x(\infty) \to -\infty$, luego:



La partícula comienza a moverse en x_0 hacia $x > 0$ ya que la fuerza es positiva. En A/B la fuerza comienza a ser negativa, lo que hace que a partir de ahí la velocidad de la partícula comience a reducirse.

Por último a partir de $t = 2A/B$ la velocidad comienza a ser negativa y la partícula comienza a retroceder hacia $-\infty$

Una cuenta de masa m resbala sin rozamiento ensartada en un alambre recto con un extremo fijo, en el origen de coordenadas. El alambre inextensible y de masa despreciable, puede girar libremente alrededor del eje z formando con el un mismo ángulo constante $\theta = \alpha$. La masa está unida al origen por un resorte de cte recuperadora k y longitud natural d. (Sin gravedad).

(a) Escribir la lagrangiana en función de las coordenadas

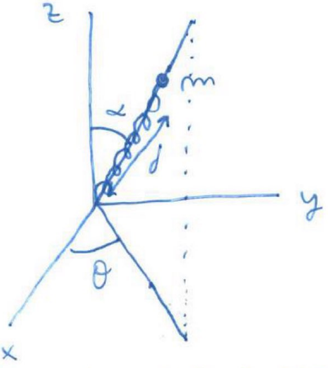
(b) Establecer los grados de libertad de la masa m y escoger coordenadas generalizadas.

(c) Identificar las simetrías del problema y cantidades conservadas

(d) Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento

Scanned with CamScanner

(e) Sin resolver las ecuaciones estudiar cualitativamente el movimiento. Calcular la frecuencia de las oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equilibrio para $d=0$.



1 Partícula en 3D, 3 coordenadas (x, y, z)

1 ligadura, $z = \cos\alpha \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r\cos\alpha$

2 Grados de libertad, 2 coordenadas generalizadas, tomamos:

$q_1 = \theta, \quad q_2 = r$. Luego:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\alpha \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta - r \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \\ \dot{y} = \dot{r} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta + r \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\theta} \cos\theta \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{r}^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\theta - \cancel{2\dot{r} r \dot{\theta} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\theta \operatorname{sen}\theta} \\ \dot{y}^2 = \dot{r}^2 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + \cancel{2\dot{r} r \dot{\theta} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\theta \operatorname{sen}\theta} \\ \dot{z}^2 = \dot{r}^2 \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = \dot{r}^2 \operatorname{sen}^2\alpha + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cos^2\alpha = \dot{r}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\theta}^2$$

Luego: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\theta}^2)$

El potencial: $V = \frac{1}{2} k (r-d)^2$, por tanto la Lagrangiana es:

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2} k (r-d)^2}$$

Scanned with CamScanner

Obtenemos las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange.

→ Ecuación para r:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -k(r-d) + m r \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \quad , \text{ por tanto:}$$

$$\boxed{m\ddot{r} = \underbrace{m r \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}_{\text{Fuerza centrífuga}} - \underbrace{k(r-d)}_{\text{Fuerza elástica}}}$$

→ Ecuación para θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta \text{ es coordenada cíclica, } P_\theta = cte \;//$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \boxed{m \dot{\theta} r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = P_\theta = cte}$$

El momento generalizado con respecto a θ se conserva.

→ Veamos el Hamiltoniano:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{H = cte \text{ , se conserva}}$$

Además, como las relaciones entre coordenadas no dependen de t, se cumplirá que $\boxed{H = E = cte}$, explícitamente:

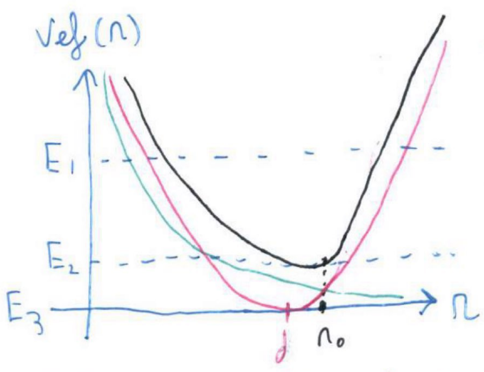
$$H = \sum_{i=1}^{2} \dot{q}_i P_i - L = m\dot{\theta}^2 r^2 \operatorname{sen}^2\alpha + m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m r^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{2}k(r-d)^2 = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 r^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k(r-d)^2 = T + V = E = cte \;//$$

Ahora realizaremos un análisis del movimiento, a partir de la conservación de la energía, luego:

$$m\dot{\theta}r^2 \operatorname{sen}^2\alpha = P_\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m r^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$$, Lo sustituimos en E:

$$E(r) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{m r^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{1}{2}k(r-d)^2}_{V_{efectivo}(r)} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{T(\dot{r}) \geq 0}$$

→ La partícula solo se podrá mover en aquellos puntos tales que $E(r) \geq V_{efec.}(r)$. Representando el $V_{efec}(r)$:



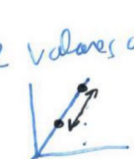
$$V_{ef}(r) = \frac{P_\theta^2}{2 m r^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{1}{2}k(r-d)^2$$

3 1 2

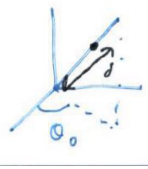
Veamos los diferentes casos

→ Si: $P_\theta = 0 \Rightarrow$ no hay rotación del alambre, el potencial es equivalente al de 2. Hay dos casos.

- Si: $E = E_1$, La partícula oscila entre 2 valores de r, r_{min} y r_{max}, a un ángulo θ_0 cte.



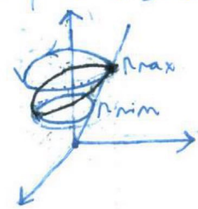
- Si: $E = E_3$, La partícula está detenida en $r = d$:



Scanned with CamScanner

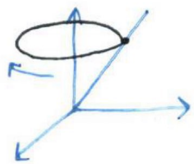
Si $P_\theta \neq 0$, existe rotación, tenemos de nuevo dos casos:

- Si $E = E_1$, la partícula rota y oscila entre dos valores de r; $r \in [r_{min}, r_{max}]$



Posible trayectoria

- Si $E = E_3$, la partícula rota a un valor cte r_0 para r.



Ya por último calculamos la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio, r_0. Haciendo un desarrollo de Taylor:

$$V_{efc}(r) \simeq V(r_0) + \cancel{\left.\frac{dV_{ef}(r)}{dr}\right|_{r=r_0}}^{\,0} (r-r_0) + \left.\frac{d^2V_{ef}(r)}{dr^2}\right|_{r=r_0} \frac{1}{2}(r-r_0)^2$$

$$= E_0 + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2 \Rightarrow k = \left.\frac{d^2V_{ef}(r)}{dr^2}\right|_{r=r_0}$$

En primer lugar calculamos r_0:

Podemos suponer $d=0$

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = -\frac{\cancel{2}P_\theta^2}{\cancel{2}m r^3 \operatorname{sen}^2\alpha} + k(r-d) \qquad \left.\frac{dV_{ef}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_\theta^2}{m r_0^3 \operatorname{sen}^2\alpha} = k r_0 \Rightarrow r_0^4 = \frac{P_\theta^2}{m \operatorname{sen}^2\alpha\, k}$$

Scanned with CamScanner

$$\left.\frac{d^2 V_{ef}}{dr^2}\right|_{r_0} = \frac{3 p_\theta^2}{m r_0^4 \operatorname{sen}^2 \alpha} + K = K' = m\omega^2 \Rightarrow$$

$$r_0^4 = \dots$$

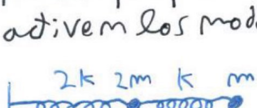
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3 p_\theta^2}{m^2 r_0^4 \operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{K}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3 \cancel{p_\theta^2}}{\cancel{m^2}\left(\dfrac{\cancel{p_\theta^2}}{\cancel{m} \cancel{\operatorname{sen}^2 \alpha} K}\right)\cancel{\operatorname{sen}^2 \alpha}} + \frac{K}{m} = \frac{3K}{m} + \frac{K}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

→ Nos damos cuenta de que es correcto ya que si no hubiese rotación $p_\theta = 0$, y por tanto nos saldría que $\omega = \sqrt{K/m}$, frecuencia natural del muelle.

Dos cuentas de masas 2m y m se pueden mover sin rozamiento
ensartadas en un alambre horizontal inextensible fijado
a una pared por uno de sus extremos. Las masas están unidas
a la pared y entre sí por 2 resortes de ctes 2K y K
como se muestra en la figura. Encontrar las frecuencias y
modos propios de oscilación. Establecer las C.I. que
activen los modos propios de oscilación.



2 Partículas en 1D, 0 ligaduras

2 grados de libertad $\begin{cases} q_1 = x_1 \\ q_2 = x_2 \end{cases}$

$$T = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad , \quad \{m\} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$V = K x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2kx_1 - k(x_2 - x_1) \qquad A_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = 2k + k = 3k$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1) \qquad A_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = k$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = -k \quad //$$

Por tanto $\{A\} = \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$

→ Calculamos las frecuencias de oscilación $\det\left[\{A\} - \omega^2\{m\}\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} 3k - \omega^2 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3k - 2\omega^2 m)(k - \omega^2 m) - k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3k^2 - \omega^2 m 3k - 2\omega^2 m k + 2\omega^4 m^2 - k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\omega^4 m^2 - 5mk\omega^2 + 2k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{5\cancel{m}k \pm \sqrt{25\cancel{m^2}k^2 - 16\cancel{m^2}k^2}}{4m^{\cancel{2}}} = \frac{5k \pm 3k}{4m} \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \end{cases}$$

→ Calculamos ahora los autovectores : $(\{A\} - \omega_i^2\{m\})\vec{a}_i = 0$:

Modo 1 $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$:

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_1 = -a_2 \, // \\ \vec{a} = (a, -a) \end{matrix}$$

Scanned with CamScanner

Modo 2 $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{2m}}$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$:

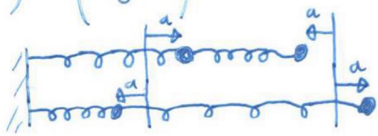
$$\begin{pmatrix} 2K & -K \\ -K & \frac{1}{2}K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2b_1 = +b_2 \\ \vec{b} = (b, b) \end{array}$$

→ Veros como oscilam estos modos:

Modo 1 vibra M_1, $M_2 = 0$: $\omega = \omega_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = aM_1 \\ x_2 = -aM_2 \end{array}$$

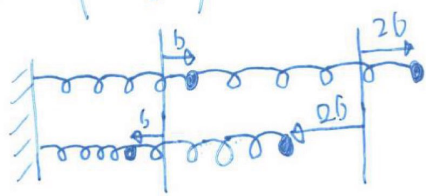
es um modo "antisimetico":



Modo 2 vibra M_2, $M_1 = 0$, $\omega = \omega_2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = bM_1 \\ x_2 = 2bM_2 \end{array}$$

um modo simétrico com el doble de Amplitud para la segunda partícula.



Scanned with CamScanner

Introducción

Apelidos: Nome:

Exame de Mecánica Clásica I (Xoves, 14 de Xaneiro de 2016)

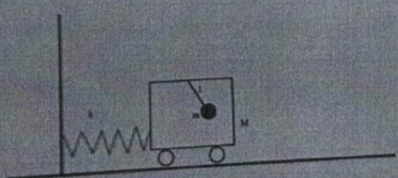
1.- Unha partícula de masa m esvara por un plano inclinado de ángulo θ baixo a acción da gravidade e dunha forza de rozamento $F = kmv^2$, sendo k unha constante. Calcular a velocidade terminal da partícula e probar que o tempo que tarda en percorrer unha distancia D partindo do repouso é $t = \cosh^{-1}(e^{kD})/\sqrt{(kg\sin\theta)}$ 2 ptos $t = \frac{\operatorname{arcosh}(e^{kD})}{\sqrt{\ }}$

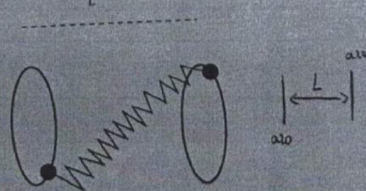
2.- Dúas masas iguais móvense, sen rozamento, ensartadas en sendos aneis circulares de radio R, paralelos entre sí e a unha distancia L, como se amosa na figura. As dúas masas están unidas por un resorte de constante k. Escribir o lagranxiano do sistema e as ecuacións de movemento. Calcular a hamiltoniana. Atopar unha variable cíclica que permita construir un potencial efectivo unidimensional. Representar gráficamente o potencial efectivo e describer os tipos de movemento. Calcular a frecuencia de oscilacións pequenas ao redor da posición de equilibrio. 3 ptos (No considerar Fg)

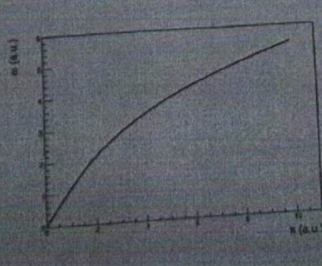
3.- A relación entre ω e k para ondas dun certo medio están indicadas na figura. Comparar razoadamente as velocidades de grupo e de fase para calquera lonxitude de onda do intervalo representado. 2 ptos

4.- Un péndulo simple de masa m e lonxitude l pendura dun vagón de masa M que pode oscilar no extremo dun resorte de constante k, como se amosa na figura. Calcular as frecuencias propias e para cada unha delas describir o movemento do modo normal correspondente nos casos (a) $m \ll M$ e (b) $m = M = l = g = 1$ e $k = 2$ (todos en unidades apropiadas). 3 ptos

Mal planteado para m<<M Jaime dice que es caquita!



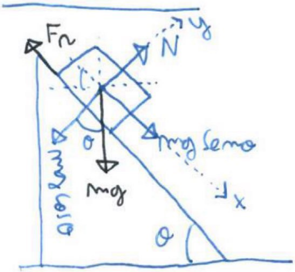




Scanned with CamScanner

EXAMEN FINAL MCI 14/I/2016

Problema 1



Aplicando la 2ª ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} \text{eje x: } \cancel{m} g \,\text{sen}\,\theta - k \cancel{m} v^2 = \cancel{m}\, a_y \\ \text{eje y: } N - mg\cos\theta = m\, a_x = 0 \end{cases}$$

$$g\,\text{sen}\,\theta - kv^2 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt = \underbrace{\int_0^v \frac{dv}{g\,\text{sen}\,\theta - kv^2}}_{(*)}$$

$$(*) \int_0^v \frac{dv}{g\,\text{sen}\,\theta - kv^2} = \frac{1}{g\,\text{sen}\,\theta}\int_0^v \frac{dv}{1 - \frac{k}{g\,\text{sen}\,\theta}v^2} = \frac{1}{g\,\text{sen}\,\theta}\int_0^V \frac{dV}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{g\,\text{sen}\,\theta}}V\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{g\,\text{sen}\,\theta}\sqrt{\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{k}}\left[\text{arctgh}\left(\sqrt{\frac{k}{g\,\text{sen}\,\theta}}V\right)\right]_0^V =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{k g\,\text{sen}\,\theta}}\,\text{arctgh}\left(\sqrt{\frac{k}{g\,\text{sen}\,\theta}}V\right) \quad \text{luego:}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{k g\,\text{sen}\,\theta}}\,\text{arctgh}\left(\sqrt{\frac{k}{g\,\text{sen}\,\theta}}V\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{k}}\,\text{tgh}\left(\sqrt{k g\,\text{sen}\,\theta}\; t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^D dx = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{k}}\int_0^t \text{tgh}\left(\sqrt{k g\,\text{sen}\,\theta}\; t\right) \Rightarrow$$

Scanned with CamScanner

$$D = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{k}} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{g\,\text{sen}\,\theta\, k}\; t\right)\right)\Big|_0^t \frac{1}{\sqrt{g\,\text{sen}\,\theta\, k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{g\,\text{sen}\,\theta\, k}\; t\right)\right) \quad \left[\begin{array}{l}\text{Puesto que } \cosh(0) = 1 \\ \text{pero } \ln(1) = 0\end{array}\right]$$

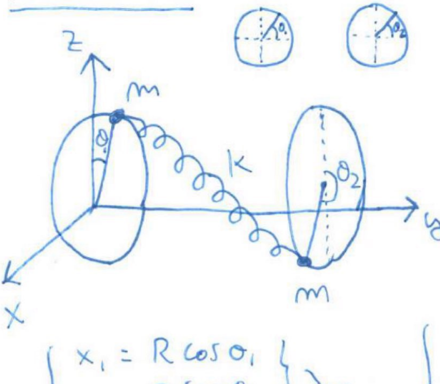
$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\text{arccosh}\left(e^{kD}\right)}{\sqrt{g\,\text{sen}\,\theta\, k}}}$$

Calculamos ahora la $V_{terminal}$ de la partícula, que es aquella para la cual la fuerza de rozamiento iguala a la fuerza de gravedad y ya no hay aceleración (MRU). En este caso:

$$m a_x = 0 = -k\cancel{m} v^2 + g\,\text{sen}\,\theta\, \cancel{m} \Rightarrow \boxed{V_T^2 = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{k}}$$

$\llcorner\, a_x = 0$ para ver V_{ter}

Problema 2



2 Partículas en 3D

4 ligaduras $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = L \\ x_1^2 + z_1^2 = R^2 \\ x_2^2 + z_2^2 = R^2 \end{cases}$

2 grados de libertad, 2 coordenadas generalizadas $\begin{cases} q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} x_1 = R\cos\theta_1 \\ z_1 = R\,\text{sen}\,\theta_1 \\ x_2 = R\cos\theta_2 \\ z_2 = R\,\text{sen}\,\theta_2 \end{cases}\right\} \text{son iguales las circunferencias} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^2 = R^2\cos^2\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 \\ \dot{z}_1^2 = R^2\,\text{sen}^2\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 = R^2\cos^2\theta_2\,\dot{\theta}_2^2 \\ \dot{z}_2^2 = R^2\,\text{sen}^2\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Luego las energías cinéticas son:

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right)$$

El potencial será:

$$V = \frac{1}{2} K \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^2 = \frac{1}{2} K \left[R^2 (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 + R^2 (\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)^2 + L^2 \right] = \frac{1}{2} K \left[R^2 \left[\cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_1 - 2\cos\theta_2 \cos\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_1 - 2 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1 \right] + L^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} K \left[R^2 \, 2 \big(1 - \underbrace{\cos\theta_2 \cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1}_{\Rightarrow -\cos(\theta_1 - \theta_2)}\big) + L^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} K \left[2R^2 \left(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + L^2 \right]$$

Por tanto el Lagrangiano es $L = T - V$:

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) - \frac{1}{2} K \left[2R^2 - 2R^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L^2 \right]}$$

→ Podemos observar que $\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \neq 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \neq 0$ por tanto buscamos unas nuevas variables para encontrar una coordenada cíclica, definimos $\theta_+ = \theta_1 + \theta_2$ y $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$ por lo que:

$$\dot{\theta}_+^2 = \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \cancel{2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}$$

$$\dot{\theta}_-^2 = \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - \cancel{2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} \quad +$$

$$\dot{\theta}_+^2 + \dot{\theta}_-^2 = 2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \Rightarrow \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_+^2 + \dot{\theta}_-^2 \right)$$

Sustituyendo en el Lagrangiano estas nuevas variables:

Scanned with CamScanner

$$\boxed{L = \frac{1}{4} mR^2\left(\dot{\theta}_+^2 + \dot{\theta}_-^2\right) - \frac{1}{2} kL^2 - kR^2 + kR^2\cos(\theta_-)}$$

→ Ecuación de Euler - Lagrange para θ_+:

$\frac{\partial L}{\partial \theta_+} = 0 \Rightarrow \theta_+$ es coordenada cíclica // $P_{\theta_+} = cte$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_+} = \boxed{\frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}_+ = P_{\theta_+} = cte}$$

→ Ecuación de Euler - Lagrange para θ_-:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_-} = kR^2 \operatorname{sen}(\theta_-)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_-} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}_- \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_-}\right) = \frac{1}{2} mR^2 \ddot{\theta}_-$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m \ddot{\theta}_- = -k \operatorname{sen}(\theta_-)}$$

→ como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = -\frac{dH}{dt} \Rightarrow \boxed{H = cte}$ Además como las relaciones entre coordenadas no dependen de t explícitamente $\Rightarrow \boxed{H = E = cte}$

$$H = \sum_i P_i \dot{q}_i - L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}_+^2 + \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}_-^2 - \frac{1}{4} mR^2 (\dot{\theta}_+^2 + \dot{\theta}_-^2)$$

$$+ \frac{1}{2} kL^2 + kR^2 - kR^2 \cos^2(\theta_-) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{4} mR^2(\dot{\theta}_+^2 + \dot{\theta}_-^2) + \frac{1}{2} kL^2 + kR^2 - kR^2\cos(\theta_-) = T + V = E}$$

Scanned with CamScanner

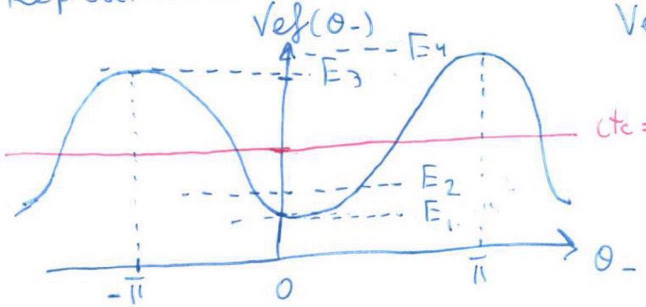
→ Construimos ahora un potencial unidimensional:

$$\dot{\theta}_+ = \frac{2 P_{\theta+}}{m R^2}$$

, Sustituimos en la expresión de E:

$$E = \underbrace{\frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}_-^2}_{T(\dot{\theta}_-) \geq 0} + \underbrace{\frac{P_{\theta+}^2}{m R^2} + \frac{1}{2} k L^2 + k R^2 + k R^2 \cos(\theta_-)}_{V_{efec}(\theta_-)}$$

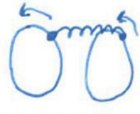
Representamos:



$V_{efec}(\theta_-) = k R^2 \cos(\theta_-) + cte$

$cte = \frac{1}{2} k L^2 + k R^2 + \frac{P_{\theta+}^2}{m R^2}$

caso (a) Si $P_{\theta+} \neq 0$

<u>a.1</u> → $E = E_1$, Las dos partículas rotan sin desfase: 
(equilibrio estable)

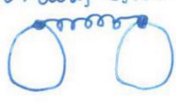
<u>a.2</u> → $E = E_2$ Las dos partículas rotan con un desfase que varía entre dos ángulos

<u>a.3</u> → $E = E_3$ Las dos partículas rotan encontrándose en fases opuestas  (Equilibrio inestable)

<u>a.4</u> → $E = E_4$ Las partículas rotan con cualquier desfase

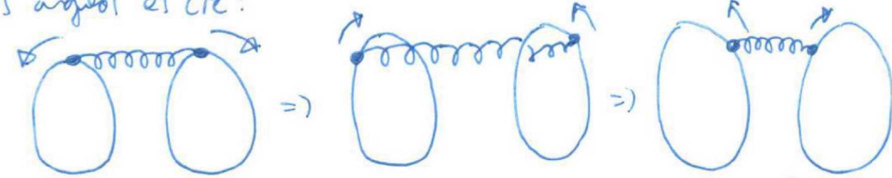
caso (b) Si $P_{\theta+} = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = cte$ //

<u>b.1</u> → $E = E_1$ Las partículas están quietas con cierto ángulo $\theta_1 = 0$



Scanned with CamScanner

b.2 → $E=E_2$: Las partículas oscilan de forma que la suma de los ángulos es cte:



b.3 → $E=E_3$ Las partículas se mueven con cualquier desfase pero cumpliendo que $\theta_1+\theta_2=$ cte //

→ Por último calculamos la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio $\theta_-=0$

$$\frac{\partial V_{ef}(\theta_-)}{\partial\theta_-}=-KR^2\,\text{sen}(\theta_-)\qquad\frac{\partial^2 V_{ef}(\theta_-)}{\partial\theta_-^2}=KR^2\cos(\theta_-)$$

Utilizando un desarrollo de Taylor:

$$V_{ef}(0)\simeq V_{ef}(0)+\cancel{\frac{\partial V_{ef}}{\partial\theta}\bigg|_{\theta_-=0}(\theta_-)}^{\,0}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2V_{ef}}{\partial\theta_-^2}(\theta_-)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{ef}(0)\simeq V_{ef}(0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2V_{ef}}{\partial\theta^2}(\theta_-)^2=E_0+\frac{1}{2}kR^2(\theta_-)^2$$

Luego:

$$K'R^2=\omega^2 m R^2=KR^2\cos(\theta_-)\Big|_{\theta_-=0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\omega=\sqrt{k/m}}$$

Scanned with CamScanner

Problema 3

Por la figura que tenemos se puede deducir que la relación entre ω y K viene dada por $\omega = \sqrt{\alpha K}$ siendo α un factor cte positivo. Luego podemos calcular las velocidades de grupo y fase:

$$V_f = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{\alpha}{K}}$$

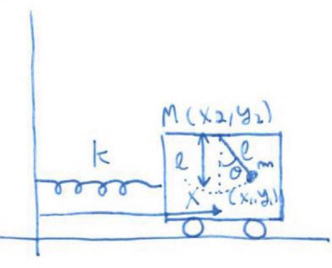
Dividiendolas:

$$V_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{K}}$$

$$\frac{V_f}{V_g} = \frac{\cancel{\sqrt{\alpha}}/\cancel{\sqrt{K}}}{\cancel{\sqrt{\alpha}}/2\cancel{\sqrt{K}}} \Rightarrow V_f = 2V_g \Rightarrow V_f > V_g$$

Por lo que se trata de un medio con dispersión normal //

Problema 4



2 masas en 2D

2 ligaduras

2 coordenadas generalizadas $\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \theta \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x + l\,\text{sen}\,\theta \\ y_1 = l - l\cos\theta \\ x_2 = x \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_1 = +l\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 = \dot{x}^2 + l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\,l\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_1^2 = l^2\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\theta \\ \dot{x}_2^2 = \dot{x}^2 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

Scanned with CamScanner

$$T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 l^2 + m \dot{\theta} l \dot{x} \cos\theta$$

Haciendo una aproximación para pequeñas oscilaciones

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \simeq 1 \quad , \text{ luego:}$$

$$T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 l^2 + m \dot{\theta} l \dot{x} \qquad \{m\} = \begin{pmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = mgl - mgl\cos\theta + \frac{1}{2} k x^2 \\ \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = cte + mgl\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2} k x^2 \text{, Calculamos } \{A\}:$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx \quad A_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = 0 = A_{12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl\theta \quad A_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mgl$$

$$\text{Por tanto } \{A\} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}$$

→ Calculamos las frecuencias de oscilación $\det\left[\{A\} - \omega^2\{m\}\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2(m+M) & -\omega^2 mL \\ -\omega^2 mL & mg - \omega^2 mL^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k - \omega^2(m+M))(mg - \omega^2 mL^2) - \omega^4 m^2 L^4 = 0$$

Scanned with CamScanner

$$K \cancel{mgL} - w^2 (m+M) \cancel{mgL} - w^2 \cancel{m} L^{\cancel{2}} K + w^4 (\cancel{m} + M) \cancel{m} L^{\cancel{2}} \cancel{- w^4 m^2 L^2} = 0$$

$$Kg - w^2 \left[(m+M) g + LK \right] + w^4 M L = 0 \quad \text{luego:}$$

$$w^2 = \frac{+ (m+M) g + LK \pm \sqrt{(M+m)^2 g^2 + L^2 K^2 + 2 (M+m) g LK - 4 Kg ML}}{2 ML}$$

Si ahora tomamos $M \gg m \Rightarrow M + m \simeq M$:

$$w^2 = \frac{Mg + LK \pm \sqrt{M^2 g^2 + L^2 K^2 + 2 MgLK - 4 MgLK}}{2 ML} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w^2 = \frac{Mg + LK \pm \sqrt{(Mg - LK)^2}}{2 ML} = \frac{Mg + LK \pm Mg - LK}{2Kg}$$

Por tanto $w_1^2 = \dfrac{Mg + \cancel{LK} + Mg - \cancel{LK}}{2 ML} = \dfrac{g}{L} \Rightarrow \boxed{w_1 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}}$

$$w_2^2 = \frac{\cancel{Mg} + LK - \cancel{Mg} + LK}{2 ML} = \frac{K}{M} \Rightarrow \boxed{w_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}}$$

Al obtener los auto vectores: $\left[\{A\} - w_i^2 \{m\} \right] \vec{a}_i = 0 \quad \left(\dfrac{m}{M} \simeq 0 \right)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_1 = a \\ a_2 = 0 \\ \vec{a} = (0, a) \end{matrix}$$

$\left(\text{Para } w_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \right)$

Scanned with CamScanner

$$\begin{pmatrix} k-\frac{g}{L}M & -gm \\ -gm & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \end{matrix}$$

Luego en los modos, el sistema se moverá:

Modo 1 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ vibra M_1, $M_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = aM \\ \theta = 0 \end{matrix}$$

→ oscila el coche y el péndulo no

Modo 2 $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ vibra M_2, $M_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ \theta = 0 \end{matrix} \quad \text{No vibran //}$$

→ El ejercicio está mal planteado, no se llega a nada con lógica en este apartado.

(b) $m = M = l = g = 1$, $k = 2$:

$$\omega^2 = \frac{(kL + (m+M)g) \pm \sqrt{(kL + (M+m)g)^2 - 4MLkg}}{2ML} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \omega_1^2 = 2+\sqrt{2} \\ \searrow \omega_2^2 = 2-\sqrt{2} \end{matrix}$$

Scanned with CamScanner

Auto vectores de nuevo: , $\omega_1^2 = 2+\sqrt{2}$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\begin{array}{c} *_1 \\ \\ *_2 \end{array} \begin{pmatrix} -2-2\sqrt{2} & -2-2\sqrt{2} \\ & \\ -2-2\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

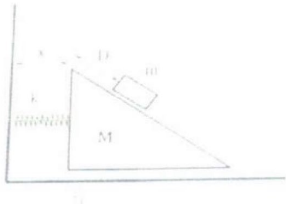
$$*_1 \quad a_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} a_2 = - a_2$$

$$*_2 \quad a_1 = \frac{-(1+\sqrt{2})}{2+2\sqrt{2}} a_2 = -\frac{1}{2} a_2 =$$

De nuevo nada con sentido, pues no se obtienen los mismos factores de proporcionalidad entre a_1 y a_2 //

[illegible] Interpretar o resultado indicando o movemento das masas para cada unha das frecuencias atopadas.

Tambien cayó en I/2018//



2.- Unha conta de masa m esvara sen rozamento ensartada nun arame coa forma $z(\rho) = a(\rho/a)^4$. O arame xira ao redor do eixo z con velocidade angular constante. A gravidade da terra comunícalle unha aceleración g na dirección do eixo z. (a) Escribir a lagranxiana do sistema usando as coordenadas cilíndricas (z, ρ, ϕ). Cantos graos de liberdade ten o sistema? (b) Atopar a ecuación do movemento en función da coordenada ρ. (c) Atopar o radio da órbita circular e comprobar se é estable. T2

3.- Un foguete de masa inicial total M_0, onde a metade é combustible, parte do repouso sobre unha mesa horizontal. O coeficiente de rozamento coa superficie da mesa é μ. No instante $t = 0$, o foguete arranca expulsando os gases a un ritmo constante $\gamma = |dM/dt|$ con velocidade (relativa ao foguete) V_{ex}. A aceleración da gravidade actúa cara abaixo e todo movemento se esenvolve sobre a mesa. (a) Calcular a V_{ex} mínima necesaria para iniciar o ovemento. (b) Cal é a velocidade máxima, V_{max}, que acada o foguete no so (a)? (c) Que distancia aínda percorre dende o momento en que se agota combustible? (d) Deducir a ecuación dun foguete (masa M e velocidade v)

ec cohete $$M dv/dt + V_{ex} dM/dt = \sum \text{Forzas}.$$ T1

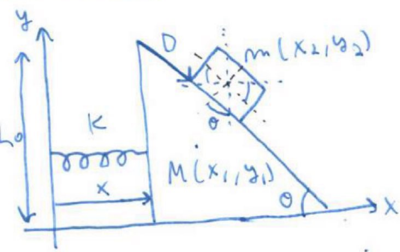
Unha corda de lonxitude L ten un extremo fixo e o outro está atado anel de masa despreciable que se pode deslizar sen rozamento por variña. Calcular as frecuencias de oscilación. A corda inicialmente en uso ten unha amplitude dada por $f(x) = x(1 - x/(2L))$. Calcular o mento posterior da corda. T4 $x\left(1 - \frac{x}{2L}\right)$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

EXAMEN FINAL MCI 30/VI/2016

Problema 1



2 masas en 2D. 2 ligaduras.

2 grados de libertad, 2 coordenadas generalizadas $\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = D \end{cases}$ Luego:

$(y_1 = 0)$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x + D\cos\theta \\ y_2 = L_0 - D\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 = \dot{x} + \dot{D}\cos\theta \\ \dot{y}_2 = -\dot{D}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^2 = \dot{x}^2 \\ \dot{x}_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{D}^2\cos^2\theta + 2\dot{x}\dot{D}\cos\theta \\ \dot{y}_2^2 = \dot{D}^2\,\mathrm{sen}^2\theta \end{cases}$$

Luego $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{D}^2 + 2\dot{x}\dot{D}\cos\theta\right) + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 =$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{D}^2 + \dot{x}\dot{D}\cos\theta\, m$$

$$V = mg\,y_2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = (L_0 - D\,\mathrm{sen}\,\theta)mg + \frac{1}{2} k x^2$$

Por tanto:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{D}^2 + \dot{x}\dot{D}\cos\theta\, m - (L_0 - D\,\mathrm{sen}\,\theta)mg - \frac{1}{2} k x^2}$$

→ Ecuación de Euler-Lagrange para x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} - m\dot{D}\cos\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m+M)\ddot{x} + m\ddot{D}\cos\theta$$

$$\boxed{-kx = (m+M)\ddot{x} + m\ddot{D}\cos\theta}$$

Scanned with CamScanner

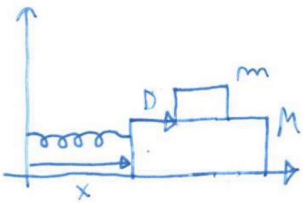
→ Ecuación de Euler - Lagrange para (D) :

$$\frac{\partial L}{\partial D} = m g \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot D} = m\dot D + m\dot x \cos\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot D}\right) = m\ddot D + m\ddot x\cos\theta$$

$$\boxed{g \operatorname{sen}\theta = \ddot D + \ddot x \cos\theta}$$

→ Procedemos al cálculo de las frecuencias y modos normales, suponiendo que $\alpha \simeq 0$. El nuevo sistema que vamos a tener es el siguiente: $\operatorname{sen}\theta \simeq 0$, $\cos\theta \simeq 1$



$$T \simeq \frac{1}{2}(m+M)\dot x^2 + \frac{1}{2} m\dot D^2 + m\dot D\dot x$$

$$V \simeq cte + \frac{1}{2} k x^2$$

Por tanto las matrices $\{m\}$ y $\{A\}$ son:

$$\{m\} = \begin{pmatrix} m+M & m \\ m & m \end{pmatrix} \qquad \{A\} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Calculamos las frecuencias de oscilación : $\det\left[\{A\} - w^2\{m\}\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} k - w^2(m+M) & -w^2 m \\ -w^2 m & -w^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k - w^2(m+M))(-w^2 m) - w^4 m^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-w^2 m\left[k - w^2(m+M) - w^2 m\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{w_0 = 0}, \quad k - w^2(\cancel{m} + M - \cancel{m}) = 0 \Rightarrow \boxed{w_1 = \sqrt{k/M}}$$

Scanned with CamScanner

→ vemos los autovectores, $[\{A\} - w_i^2 \{m\}]\vec{a}_i = 0$

• $w_0 = 0$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$:

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = a \\ \vec{a} = (0, a) \end{array}$$

• $w_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{K}{M} m & -\frac{K}{M} m \\ -\frac{K}{M} m & -\frac{K}{M} m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} b_1 = -b_2 \\ \vec{b} = (b, -b) \end{array}$$

→ Los modos de oscilación son los siguientes:

Modo 1 $w = w_0 = 0$, vibra M_1, $M_2 = 0$:

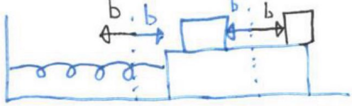
$$\begin{pmatrix} X \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} X = 0 \\ D = M_1 a \end{array}$$

Tenemos una translación del Bloque, no es un modo de oscilación //

Modo 2 $w = w_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, Vibra M_2, $M_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} X \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} X = M_2 b \\ D = -M_2 b \end{array}$$

Tenemos un modo antisimétrico:



Scanned with CamScanner

Problema 2 (1 grado de libertad, 2 ligaduras, pues $z=a(\rho/a)^4$, $\phi=\dot\phi t$)

$$z(\rho)=a(\rho/a)^4=\frac{1}{a^3}(x^2+y^2)^2=\frac{1}{a^3}(x^4+y^4+2x^2y^2)$$

→ Se mueve a través de esa superficie con $\dot\phi = cte$, $\phi=\phi_0+\dot\phi t$

tomando $\phi_0=0$, $\phi=wt$. Luego:

$$\begin{cases} x=\rho\cos(\phi)=\rho\cos(wt) \\ y=\rho\,\mathrm{sen}(\phi)=\rho\,\mathrm{sen}(wt) \\ z=\frac{1}{a^3}\rho^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot x=\dot\rho\cos(wt)-\rho w\,\mathrm{sen}(wt) \\ \dot y=\dot\rho\,\mathrm{sen}(wt)+\rho w\cos(wt) \\ \dot z=\frac{4}{a^3}\rho^3\dot\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x^2=\dot\rho^2\cos^2(wt)+\rho^2w^2\,\mathrm{sen}^2(wt)-2\rho\dot\rho w\,\mathrm{sen}(wt)\cos(wt) \\ \dot y^2=\dot\rho^2\,\mathrm{sen}^2(wt)+\rho^2w^2\cos^2(wt)+2\rho\dot\rho w\,\mathrm{sen}(wt)\cos(wt) \\ \dot z^2=\frac{16}{a^6}\rho^6\dot\rho^2 \end{cases}$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2+\rho^2w^2+\frac{9}{a^6}\rho^6\dot\rho^2\right)$$

$V=mgz=mg\frac{1}{a^3}\rho^4$ Luego:

$$\boxed{L=\frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2+\rho^2w^2+\frac{16}{a^6}\rho^6\dot\rho^2\right)-mg\frac{1}{a^3}\rho^4}$$

→ Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial\rho}=m\rho w^2+\frac{48}{a^6}\rho^5\dot\rho^2m-mg\frac{4}{a^3}\rho^3$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}=m\dot\rho+\frac{16}{a^6}m\dot\rho\rho^6,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}\right)=m\ddot\rho+\frac{16}{a^6}m\ddot\rho\rho^6$$

$+\frac{96}{a^6}m\dot\rho^2\rho^5$, luego: $\cancel{m}\rho w^2+\frac{48}{a^6}\rho^5\dot\rho^2\cancel{m}-\cancel{m}g\frac{4}{a^3}\rho^3=\cancel{m}\ddot\rho+\frac{16}{a^6}\cancel{m}\ddot\rho\rho^6+\frac{96}{a^6}\cancel{m}\dot\rho^2\rho^5$

$$\boxed{\rho w^2+\frac{48}{a^6}\rho^5\dot\rho^2-g\frac{4}{a^3}\rho^3=\ddot\rho+\frac{16}{a^6}\ddot\rho\rho^6+\frac{96}{a^6}\dot\rho^2\rho^5}$$

Scanned with CamScanner

Para ver el radio circular estudiaremos el Hamiltoniano del sistema ya que $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = -\frac{dH}{dt} \Rightarrow H = cte$ //, pero como las relaciones de coordenadas dependen de t $E \neq H$, La energía no se conserva, pues haría falta una fuerza externa para mantener esa rotación:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = m\dot{\rho}^2 + \frac{16}{a^6} m\dot{\rho}^2\rho^6 - \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 - \frac{8}{a^6}\rho^6\dot{\rho}^2 + mg\frac{1}{a^3}\rho^4 = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{8}{a^6}m\dot{\rho}^2\rho^6 - \frac{1}{2}m\rho\omega^2 + mg\frac{1}{a^3}\rho^4$$ //

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{8}{a^6}m\dot{\rho}^2\rho^6}_{T(\dot{\rho}^2,\rho)\geq 0} \underbrace{- \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + mg\frac{1}{a^3}\rho^4}_{V_{ef}(\rho)} = cte$$

y si $\left.\frac{dV_{ef}(\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho_0} = -m\rho_0\omega^2 + mg\frac{4}{a^3}\rho_0^{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\rho_0^3 = \frac{\omega^2 a^3}{4g} //}$ Vemos si es un mínimo:

$$\frac{d^2V_{ef}(\rho)}{d\rho^2} = -m\omega^2 + 12mg\frac{1}{a^3}\rho^2$$

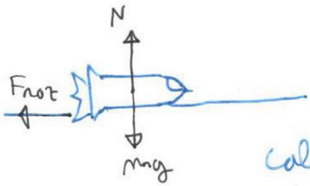
$$\left.\frac{d^2V_{ef}(\rho)}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} = -m\omega^2 + 12m\cancel{g}\frac{1}{\cancel{a^3}}\frac{\omega^2\cancel{a^3}}{4\cancel{g}} = -m\omega^2 + 3m\omega^2 =$$

$= 2m\omega^2 > 0 \Rightarrow$ es un mínimo del potencial

Por lo que la circunferencia con radio $\rho_0 = \sqrt{\frac{\omega^2 a^3}{4g}}$ es estable //

Scanned with CamScanner

Problema 3



$F_r = \mu \cdot N$ Aplicando la segunda ley de Newton al eje y: $N - mg = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N = M(t) g$

calculamos $M(t)$:

$\frac{dM}{dt} = -\gamma$ pues el cohete pierde masa $\Rightarrow \int_{M_0}^{M} dM = -\gamma \int_0^t dt \Rightarrow$

$\Rightarrow M(t) = M_0 - \gamma t$ // $\Rightarrow F_r = \mu g (M_0 - \gamma t)$ //

Ahora aplicamos la ecuación del cohete: $M_0 \frac{dv}{dt} + V_{ex} \frac{dM}{dt} = -F_r$

$$\Rightarrow M_0 \frac{dv}{dt} - V_{ex} \gamma = -\mu g (M_0 - \gamma t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{V_{ex} \gamma}{M_0} - \mu g \frac{(M_0 - \gamma t)}{M_0}, \text{ en } t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{V_{ext} \gamma}{M_0} - \mu g$$

Para iniciar el movimiento $\frac{dv}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{V_{ext} \gamma}{M_0} > \mu g \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V_{ext} > \frac{M_0 \mu g}{\gamma}}$$

(b) El tiempo que tarda en alcanzar la velocidad máxima será igual al tiempo que tarde en perder todo el combustible y deje de acelerar: $M_0/2 = M_0 - \gamma t \Rightarrow t_{max} = M_0/2\gamma$

Ahora si calculamos $V(t)$:

$$\int_0^V dV = \int_0^t \frac{V_{ext} \gamma}{M_0} dt - \frac{\mu g}{M_0} \int_0^t (M_0 - \gamma t) dt = \frac{V_{ext} \gamma}{M_0} t - \mu g t + \frac{\mu g}{M_0} \gamma \frac{1}{2} t^2$$

Scanned with CamScanner

$$V(t) = \frac{V_{ext}\gamma}{M_0} t - \mu g t + \frac{\mu g \gamma}{2M_0} t^2 \quad //$$

Veros $V(t_{max})$:

$$V_{max} = \frac{V_{ext}\cancel{\gamma}}{\cancel{M_0}} \left(\frac{\cancel{M_0}}{2\cancel{\gamma}}\right) - \mu g \left(\frac{M_0}{2\gamma}\right) + \frac{\mu g \cancel{\gamma}}{2\cancel{M_0}} \left(\frac{M_0^{\cancel{2}}}{4\gamma^{\cancel{2}}}\right) =$$

$$= \frac{V_{ext}}{2} - \mu g \frac{M_0}{2\gamma} + \frac{\mu g M_0}{8\gamma} = \frac{V_{ext}}{2} - \frac{3}{8\gamma}\mu g M_0$$

$$\boxed{V_{max} = \frac{V_{ext}}{2} - \frac{3}{8\gamma}\mu g M_0}$$

Vex

ⓒ Aplicando la 2ª ley de Newton $\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -F_r = -\mu \frac{M_0}{2} g = M_0/2 \frac{dV}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{V_{max}}^{0} dV = -\mu g \int_0^t dt \Rightarrow V_{MAX} = \mu g t \Rightarrow$$

$$\boxed{t = \frac{V_{MAX}}{\mu g} = \frac{V_{ext}}{2\mu g} - \frac{3}{8\gamma} M_0}$$

Para el caso de los gases salgan con $V_{ext} \simeq \frac{M_0 \mu g}{\gamma}$ (un poco más)

$$V_{max} = \frac{V_{ext}}{2} - \frac{3}{8} V_{ext} = \frac{1}{8} V_{ext} \quad //$$

$$t = \frac{V_{ext}}{8\mu g} \qquad X(t) = \int_0^t V_{max} - \mu g t \, dt = V_{max} t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

$$\boxed{X_{MAX} = \frac{1}{8} V_{ext}\left(\frac{V_{ext}}{8\mu g}\right) - \frac{1}{2}\mu g \left(\frac{V_{ext}}{8\mu g}\right)^2 = \frac{V_{ext}^2}{64\mu g} - \frac{V_{ext}^2}{128\mu g} = \frac{V_{ext}^2}{128\mu g}}$$

Scanned with CamScanner

1) Demostramos la ecuación del cohete:

$u \equiv$ velocidad con la que salen los gases del cohete con respecto al cohete (en módulo)

$dm' \equiv$ masa en que aumentan los gases > 0 en un dt

$dv \equiv$ velocidad en que aumenta la nave en un dt

$v + dv - u \equiv$ velocidad de los gases respecto a un observador inercial (que está fuera de la nave)

$$dp = p(t+dt) - p(t)$$

$$p(t) = mv$$

$$p(t+dt) = P_C(t+dt) + P_G(t+dt) = (m - dm')(v+dv) + (v+dv-u)dm'$$

$$dp = \cancel{-mv} + m\,dv \cancel{- dm'dv} + \cancel{mv} \cancel{- v\,dm'} + \cancel{v\,dm'} + \cancel{dv\,dm'} - u\,dm'$$

$dp = m\,dv - u\,dm'$ por tanto:

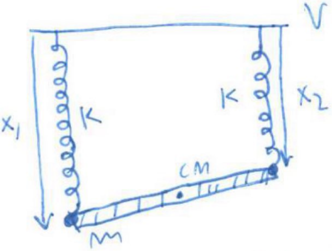
$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= m\frac{dv}{dt} - u\frac{dm'}{dt} \\ \frac{dm'}{dt} &= -\frac{dm}{dt} \quad (dm\text{, masa que pierde el cohete}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = F_e \quad //$$

Scanned with CamScanner

Una barra delgada de longitud l y masa m se suspende de 2 resortes de cte K. Los extremos de la masa sólo se pueden mover verticalmente. Escribir el Lagrangiano del sistema. Calcular las frecuencias y modos normales para pequeñas oscilaciones. Considérese el efecto de la gravedad.

Nota: $I_{CM}(\text{Barra}) = \frac{1}{12} mL^2$. (I/2015)



2 "Partículas" en 2D

2 Grados de libertad.

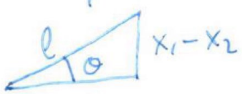
$q_1 = x_1 \quad q_2 = x_2$

Tenemos un sólido rígido: $T = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}_{cm}^2}_{T \text{ de translación}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2}_{T \text{ de rotación}}$

Luego: $X_{CM} = \frac{x_2 + x_1}{2}$, $\dot{x}_{CM} \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2}$

$T_{trans} = \frac{1}{8} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{8} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}_2 \dot{x}_1$

$T_{rot} = \frac{1}{24} m L^2 \dot{\theta}^2$ pero



$\sin\theta = \frac{x_1 - x_2}{l}$ para ángulos pequeños $\sin\theta \simeq \theta$, $\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{l}$

Luego $T_{rot} = \frac{1}{24} m \cancel{l^2} \frac{(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{\cancel{l^2}} = \frac{1}{24} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{24} m \dot{x}_1^2 - \frac{1}{12} m \dot{x}_2 \dot{x}_1$

Por tanto: $T = T_{rot} + T_{trans} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) m \dot{x}_1^2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) m \dot{x}_2^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) m \dot{x}_1 \dot{x}_2$

$= \frac{1}{6} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{6} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{6} m \dot{x}_1 \dot{x}_2$

Scanned with CamScanner

La matriz $\{m\}$ será: $\{m\} = \begin{pmatrix} 1/3\, m & 1/6\, m \\ 1/6\, m & 1/3\, m \end{pmatrix}$

Calculamos el potencial: $V = mg\, x_{cm} + 1/2\, k\, x_1^2 + 1/2\, k\, x_2^2$

$\frac{\partial V}{\partial x_1} = mg\,\frac{1}{2} + k x_1$ $\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = k = A_{11}$

$\frac{\partial V}{\partial x_2} = mg\, 1/2 + k x_2$ $\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} = A_{12} = A_{21} = 0$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2} = k$

Luego $\{A\} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

→ Calculamos las frecuencias de oscilación $\det\left[\{A\} - \omega^2 \{m\}\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2\, 1/3\, m & -\omega^2\, 1/6\, m \\ -\omega^2\, 1/6\, m & k - \omega^2\, 1/3\, m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (k - \omega^2\, 1/3\, m)^2 = (-\omega^2\, 1/6\, m)^2 \Rightarrow k - \omega^2\, 1/3\, m = \pm \omega^2\, 1/6\, m \Rightarrow$

$k - \omega^2\, 1/3\, m = 1/6\, m\, \omega^2 \Rightarrow \omega^2\left(\frac{1}{6} + 1/3\right) m = k \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$

$k - \omega^2\, 1/3\, m = -1/6\, m\, \omega^2 \Rightarrow \omega^2\left(1/3 - 1/6\right) m = k \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}}$

Scanned with CamScanner

→ Calculamos los auto vectores $(\{A\} - \omega_i^2 \{m\}) \vec{a}_i = 0$

Caso 1 $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\begin{pmatrix} k/3 & -k/3 \\ -k/3 & k/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_1 = a_2$

$\vec{a} = (a, a)$

Caso 2 $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b_1 = -b_2$

$\vec{b} = (b, -b)$

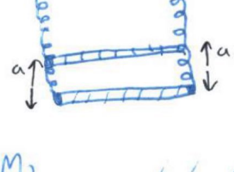
→ Vemos como oscila el sistema en estos modos:

Modo 1 $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ vibra M_1, $M_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = a M_1$

$x_2 = a M_2$



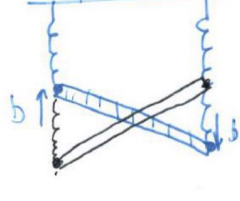
→ tenemos un modo simétrico

Modo 2 $\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ vibra M_2, $M_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = b M_2$

$x_2 = -b M_2$



→ tenemos un modo antisimétrico

Scanned with CamScanner

Una partícula de masa m se mueve sobre la superficie de un paraboloide de revolución $z = \alpha(x^2+y^2)$ en presencia de una fuerza de gravedad cte.

(a) Escribir el Lagrangiano del sistema y las ecuaciones del movimiento.

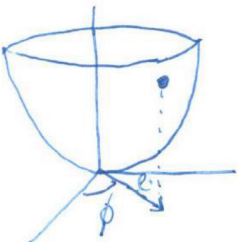
(b) Discutir la existencia de coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

(c) Escribir una expresión para la energía en función de cantidades conservadas y definir un potencial efectivo.

(d) Escribir el Hamiltoniano

(e) Estudiar cualitativamente el movimiento en base al potencial efectivo del apartado c)

(f) Calcular la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio. (VII/2015)



1 Partícula en 3D

1 Ligadura $(z = \alpha(x^2+y^2))$

2 grados de libertad, 2 coordenadas generalizadas:

$$q_1 = \rho \ , \ q_2 = \phi$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\phi \\ z = \alpha\rho^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi \\ \dot{y} = \dot{\rho}\,\text{sen}\,\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} = 2\alpha\rho\dot{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\phi + \rho^2\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\phi - 2\dot{\rho}\rho\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi \\ \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\,\text{sen}^2\phi + \rho^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + 2\dot{\rho}\rho\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi \\ \dot{z}^2 = 4\alpha^2\rho^2\dot{\rho}^2 \end{cases}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + 4\alpha^2\rho^2\dot{\rho}^2$$

Scanned with CamScanner

Por tanto $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + 4\alpha^2 \rho^2 \dot{\rho}^2 \right)$

$V = mgz = mg\alpha\rho^2$ Luego:

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + 4\alpha^2 \rho^2 \dot{\rho}^2 \right) - mg\alpha\rho^2}$$

→ Ecuación de Euler-Lagrange para ρ:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\phi}^2 + 4\alpha^2 \rho \dot{\rho}^2 m - 2mg\alpha\rho$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} + 4\alpha^2 \rho^2 \dot{\rho} m \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho} + 4\alpha^2\rho^2\ddot{\rho} m + 8\alpha^2 \rho \dot{\rho}^2 m$$

Luego: $\cancel{m}\ddot{\rho} + 4\alpha^2\rho^2\ddot{\rho}\cancel{m} + 8\alpha^2\rho\dot{\rho}^2\cancel{m} = \cancel{m}\rho\dot{\phi}^2 + 4\alpha^2\rho\dot{\rho}^2\cancel{m} - 2\cancel{m}g\alpha\rho$

$$\boxed{\ddot{\rho} + 4\alpha^2\rho^2\ddot{\rho} + 4\alpha^2\rho\dot{\rho}^2 = \rho\dot{\phi}^2 - 2g\alpha\rho}$$

→ Ecuación de Euler-Lagrange para ϕ:

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \phi$ es coordenada cíclica / $P_\phi = cte$:

$$\boxed{P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} = cte} \;//$$

→ Vemos el Hamiltoniano: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = -\frac{dH}{dt} \Rightarrow \boxed{H = cte}$, además como las coordenadas no dependen de t, explícitamente $\boxed{H = E = cte}$,

$H = \sum_i P_i \dot{q}_i - L = m\rho^2\dot{\phi}^2 + m\dot{\rho}^2 + 4\alpha^2\rho^2\dot{\rho}^2 m - \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + 4\alpha^2\rho^2\dot{\rho}^2) + m\alpha g\rho^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + 4\alpha^2\rho^2\dot{\rho}^2) + m\alpha g\rho^2$

Luego: $H = E = cte$ //

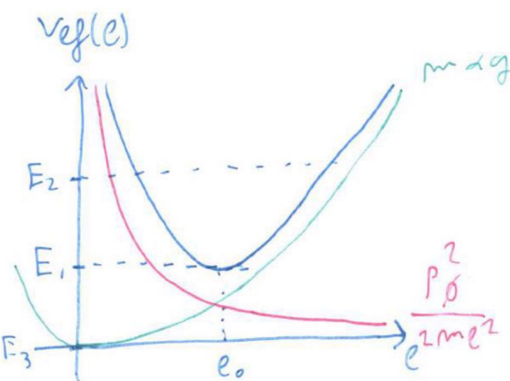
Scanned with CamScanner

→ Construimos un potencial unidimensional:

$\dot{\phi} = \dfrac{P_\phi}{m\rho^2}$, Lo sustituimos en la expresión de E:

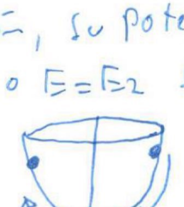
$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + 2m\alpha^2\rho^2\dot{\rho}^2}_{T(\rho^2,\dot{\rho}^2)\geq 0} + \underbrace{\frac{P_\phi^2}{2m\rho^2} + m\alpha g\rho^2}_{V_{ef}(\rho)}$$

Representamos este $V_{ef}(\rho)$:



La partícula debe estar siempre en puntos que cumplan que $E(\rho) \geq V(\rho)$ por tanto procedemos a analizar los diferentes casos:

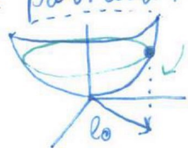
(a) Si: $P_\phi = 0 \Rightarrow \dot{\phi} m\rho^2 = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = cte$ por lo que no habría rotación, su potencial sería el representado en verde. Si: $E = E_1$ o $E = E_2$ la partícula simplemente desciende hasta $\rho = 0$ y se queda oscilando.



Si: $E = E_3$ está detenida en el origen.

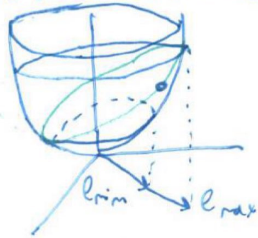
(b) Si: $P_\phi \neq 0$, la partícula rota, tenemos 2 casos:

b.1 $E = E_1$, la partícula rota con $\rho = cte = \rho_0$:



Scanned with CamScanner

Si $E=E_2$, la partícula rota con $\rho\in[\rho_{min},\rho_{max}]$:



Posible trayectoria //

Por último calculamos la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.

En primer lugar calculamos ρ_0:

$$\left.\frac{dV_{ef}}{d\rho}\right|_{\rho_0}=0\Rightarrow-\frac{P_\phi^2}{m\rho_0^3}+2m\alpha g\rho_0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho_0^4=\frac{P_\phi^2}{2m^2\alpha g}$$ //

y si hacemos un desarrollo de Taylor del potencial en ρ_0:

$$V_{ef}(\rho)\simeq V_{ef}(\rho_0)+\cancelto{0}{\left.\frac{\partial V_{ef}}{\partial\rho}\right|_{\rho_0}(\rho-\rho_0)^2}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0}(\rho-\rho_0)^2=$$

$$=E_0+\frac{1}{2}k(\rho-\rho_0)^2,$$ luego:

$$k=m\omega^2=\left.\frac{d^2V_{ef}}{d\rho}\right|_{\rho_0}=\frac{3P_\phi^2}{m\rho_0^4}+2m\alpha g\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega^2=\frac{3P_\phi^2}{m^2\rho_0^4}+2\alpha g=\frac{3P_\phi^2}{m^2\frac{P_\phi^2}{2m^2\alpha g}}+2\alpha g=$$

$$=6\alpha g+2\alpha g\Rightarrow\boxed{\omega=\sqrt{8\alpha g}}$$

Scanned with CamScanner

Ejercicio control 18-10-2016

Dada la fuerza $F = -F_0 e^{-x/\lambda}$, $F_0 = cte$, $\lambda = cte$ se pide:

ⓐ Estudiar el movimiento de la partícula integrando la ecuación anterior.

ⓑ Estudiar la velocidad asintótica. Discute el valor final que puede tomar en función de la velocidad inicial.

ⓒ Existe alguna posición X_m finita en la que la partícula o algún rango de valores V_0 para los cuales $V(X_m) = 0$? En caso afirmativo calcúlala.

Datos: $t_0 = 0 \begin{cases} x(t_0) = 0 \\ v(t_0) = cte = V_0 > 0 \end{cases}$

Está claro en un inicio que F se trata de alguna fuerza de rozamiento contraria al movimiento y que depende de la posición.

$$\vec{F} = -F_0 e^{-x/\lambda} \Rightarrow m \cdot \frac{dv}{dt} = -F_0 e^{-x/\lambda} \Rightarrow m \cdot \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -F_0 e^{-x/\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dx} v = -F_0 e^{-x/\lambda} \Rightarrow m \int_{V_0}^{V} v\, dv = -F_0 \int_0^x e^{-x/\lambda} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1/2\, m (v^2 - v_0^2) = +F_0 \lambda \left[e^{-x/\lambda} - 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m} F_0 \lambda \left[e^{-x/\lambda} - 1\right]}}$$

$\sqrt{V_0^2} \rightarrow m/s$

$\sqrt{\frac{1}{m} F_0 \lambda} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{kg} \cdot kg \cdot m/s \cdot m} \rightarrow m/s$

Vemos que es correcta ya que:

Si $x \rightarrow 0$, $V \rightarrow V_0$

Si $x > 0$ / $e^{-x/\lambda} < 0$, $V < V_0$

Scanned with CamScanner

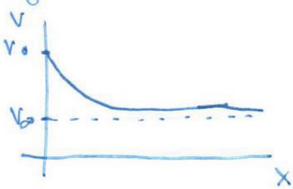
Vemos lo que ocurre ahora con V_∞:

Con $x \to \infty$, $e^{-x/\lambda} \to 0$ por lo que:

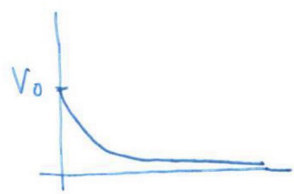
$$\left.\begin{array}{l} V_\infty = \sqrt{V_0^2 - \frac{2}{m} F_0 \lambda} \\ \text{Definimos } V_e^2 = \frac{2}{m} F_0 \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow V_\infty = \sqrt{V_0^2 - V_e^2}$$

Vemos ahora que ocurre en los tres posibles casos.

1) $V_0 > V_e \Rightarrow V_\infty > 0$ por lo que la partícula llega al infinito con velocidad igual a V_∞.



2) $V_0 = V_e \Rightarrow V_\infty = 0$ por lo que la partícula llega al infinito con $V_\infty = 0$.



3) $V_0 < V_e \Rightarrow \nexists V_\infty$ por lo que la partícula se tuvo que detener antes de llegar al infinito.

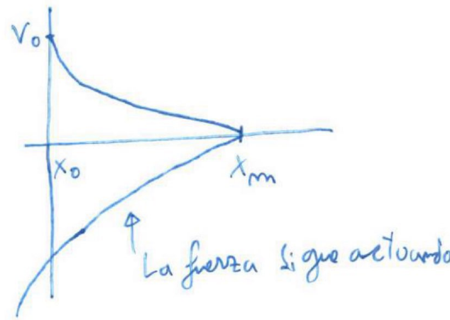
Scanned with CamScanner

Para encontrar los valores X_m imponemos la condición $v(X_m)=0$:

$$v(X_m)=0=\sqrt{V_0^2+\frac{2}{m}F_0\lambda\left[e^{-X_m/\lambda}-1\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-V_0^2\frac{m}{2F_0\lambda}=e^{-X_m/\lambda} \quad \Rightarrow \ln\left(1-\frac{mV_0^2}{2F_0\lambda}\right)=-\frac{X_m}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_m=-\lambda\ln\left(1-\frac{V_0^2}{V_e^2}\right)}$$



Ahora como "Extra" vamos a realizar el ejercicio de nuevo a través de energías, recordando que toda fuerza dependiente de la posición en 1D es conservativa, por lo que:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U \Rightarrow F=-\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU=-F\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U=\int F_0e^{-x/\lambda}\,dx \Rightarrow U=-F_0\lambda\, e^{-x/\lambda}+cte \Rightarrow$$

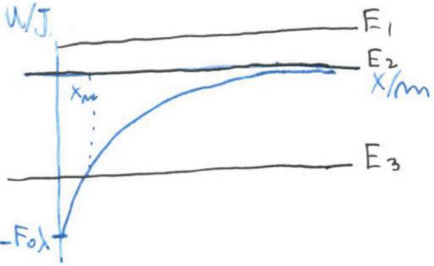
$$\Rightarrow U=-F_0\lambda e^{-x/\lambda}+cte$$

Tomamos nuestro origen de potenciales en el infinito.

Luego $U(x=\infty)=0=0+cte \Rightarrow cte=0$ //

Scanned with CamScanner

$U(x) = -F_0 \lambda e^{-x/\lambda}$, para $x=0$, $U(0) = -F_0\lambda$



La partícula solo puede estar en aquellos puntos tales que $E \geq U(x)$

De nuevo Tres caso:

$E = E_1 \Rightarrow$ La partícula puede estar en cualquier Punto $x>0$, llega al infinito, además:

$E = E_1 > 0 \Rightarrow E = T + U$ pero $U(\infty) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E = T > 0$ // $\quad T(0) + U(0) = T(\infty)$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - F_0\lambda = \frac{1}{2} m V_\infty^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{m} F_0 \lambda = V_\infty^2 - V_0^2 \Rightarrow \boxed{V_\infty = \sqrt{V_0^2 - \frac{2}{m} F_0}}$$

Si $E = E_2$, La partícula de nuevo puede estar en cualquier punto $x>0$ y de nuevo llega al infinito, pero:

$E = E_2 = 0 \Rightarrow E = T + U$, pero $U(\infty) = 0$, $E(\infty) = 0$

$\Rightarrow T(\infty) = 0$ // $V_\infty = 0$ //

Por ultimo si $E = E_3$ la partícula alcanza como máximo X_m

$E = T + U \Rightarrow T(0) + U(0) = \cancel{T(x_m)} + U(x_m) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - F_0\lambda = -F_0 \lambda e^{-x_m}$

$$\Rightarrow \boxed{x_m = -\lambda \ln\left(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2}\right)}, \quad V_e^2 = \frac{2}{m} F_0$$

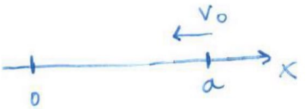
Scanned with CamScanner

Uma partícula de masa m se mueve em 1D sometida a uma fuerza $F = mkxe^{x/a}$ em el sentido positivo del eje x, donde k y a som ctes positivas. Inicialmente la masa está em $x=a$ y se mueve com velocidad V_0 em el sentido negativo del eje x.

ⓐ Calcular la energía potencial $V(x)$. Considerar $V(a)=0$

ⓑ Describir el movimiento em función del valor V_0

ⓒ ¿Sería posible que la masa llegue a $-\infty$? ¿Com qué velocidad lo haría? (I/2018)



Em 1D todas las fuerzas dependientes de la posición som conservativas, luego:

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla} V \Rightarrow F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V(x) = -\int F(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x) = -mk\int x e^{x/a} = -mkxae^{x/a} + mka\int e^{x/a}\,dx \Rightarrow$$

$$u = x \quad du = dx$$
$$dv = e^{x/a}dx \quad V = ae^{x/a}$$

$$\Rightarrow V(x) = mkae^{x/a}\left[a - x\right] + cte$$

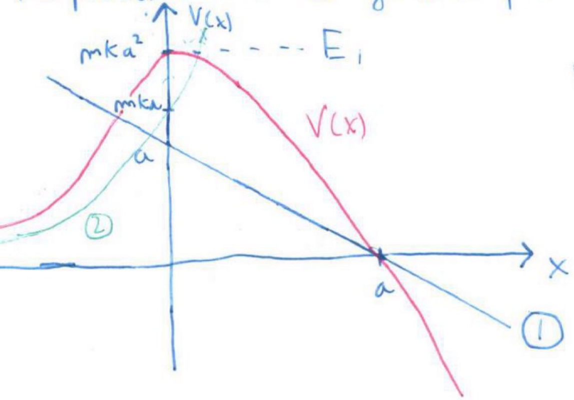
Ademas el enunciado nos dice que situemos el origen de potenciales em el punto $x=a$, Luego: $V(a)=0$:

$$V(a) = 0 + cte = 0 \Rightarrow \boxed{cte = 0}$$ Por lo que:

$$\boxed{V(x) = mkae^{x/a}\left[a - x\right]}$$

Scanned with CamScanner

Representamos la función potencial:



$$V(x) = \underbrace{mka\, e^{x/a}}_{②}\ \underbrace{[a-x]}_{①}$$

$$\frac{dV}{dx} = mk\, x\, e^{x/a}$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \iff x = 0 \text{ // máximo}$$

* Tenemos el producto de una exponencial y una recta. Cuando $x \to -\infty$, $e^{x/a} \to 0$ y aunque $(a-x) \to \infty$, lo hace más rápido la exponencial, que "domina", por lo que $V(x) \to 0$. Cuando $x \to \infty$, $e^{x/a} \to \infty$ y como $(a-x) \to -\infty$ el potencial $V(x) \to -\infty$. Además, nosotros hemos fijado como condición que $V(a) = 0$.

→ Se debe cumplir que $E(x) \geq V(x)$, como nos mandan describir el movimiento en función de V_0. Suponemos $E = E_1$:

$$E(0) = E(a) \Rightarrow \cancel{T(0)}^{0} + V(0) = T(a) + \cancel{V(a)}^{0} \Rightarrow \cancel{m}ka^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow V_0 = a\sqrt{2k}$, Luego existen 3 casos:

- Si $V_0 < a\sqrt{2k}$ la partícula se mueve Hasta un $x \in [0,a]$ y luego retrocede hasta el infinito $(+\infty)$.
- Si $V_0 = a\sqrt{2k}$ la partícula se mueve Hasta $x = 0$ y se detiene (punto de equilibrio inestable) $V_f = 0$.
- Si $V_0 > a\sqrt{2k}$ la partícula supera la barrera de potencial y avanza Hacia $-\infty$. Además: $\cancel{V(-\infty)}^{0} + T(-\infty) = \cancel{V(a)}^{0} + T(a) \Rightarrow$
  $\Rightarrow T(-\infty) = T(a) \Rightarrow \boxed{V_{-\infty} = V(a) = V_0}$

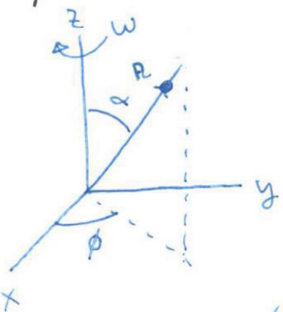
Scanned with CamScanner

Una masa m resbala sin rozamiento ensartada en un alambre recto con un extremo unido al origen de coordenadas. El alambre, inextensible y de masa despreciable, gira con velocidad angular cte ω alrededor del eje z formando con el mismo un ángulo α. Considerar que actúa la fuerza de la gravedad.

(a) Escribir L del sistema y determinar simetrías y cantidades conservadas.

(b) Establecer las ecuaciones del movimiento

(c) Estudiar el movimiento. Encontrar los puntos de equilibrio y darles una interpretación física. (I / 2018)



$\phi_0 = 0$

Si tenemos $\omega = cte \Rightarrow \phi = \phi_0 + \omega t = \omega t$

Tenemos 1 partícula en 3D

2 ligaduras $z = \cos\alpha\, r$, $\theta = \alpha$

$\phi = \omega t$

1 grado de libertad, $q = r$

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\alpha \cos(\omega t) \\ y = r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\omega t) \\ z = r\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\operatorname{sen}\alpha\cos(\omega t) - \omega r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\omega t) \\ \dot{y} = \dot{r}\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\omega t) + \omega r \operatorname{sen}\alpha\cos(\omega t) \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{r}^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2(\omega t) + \omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2(\omega t) - \cancel{\dot{r} r 2\omega \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)} \\ \dot{y}^2 = \dot{r}^2 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2(\omega t) + \omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2(\omega t) + \cancel{\dot{r} r 2\omega \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)} \\ \dot{z}^2 = \dot{r}^2\cos^2\alpha \end{cases}$$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\alpha$ luego $T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\alpha)$

$V = mgz = mgr\cos\alpha$

Scanned with CamScanner

Luego el Lagrangiano será:

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha - mgr\cos\alpha}$$

→ Ecuación de Euler-Lagrange para r:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha - mg\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\boxed{\ddot{r} = \underbrace{r\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{g\cos\alpha}_{\text{gravitatoria}}}$$

→ Vemos el Hamiltoniano: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = -\frac{dH}{dt} \Rightarrow \boxed{H = cte}$

Pero como las relaciones entre coordenadas para este caso si dependen de t, $H \neq E$, Además E no se conserva pues haría falta una fuerza externa para mantener el alambre en rotación con $\omega = cte$. Calculamos H:

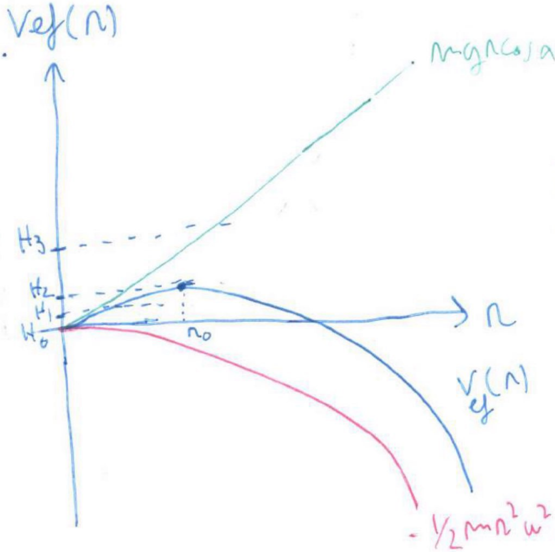
$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha + mgr\cos\alpha$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha + mgr\cos\alpha = cte}$$

Vamos a realizar un estudio del movimiento en función del Hamiltoniano:

Scanned with CamScanner

$$H = \underbrace{\tfrac{1}{2} m\dot{r}^2}_{T(\dot{r}) > 0} \underbrace{- \tfrac{1}{2} m r^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha + mgr\cos\alpha}_{V_{ef}(r)}$$

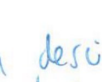


Estudiamos los diferentes casos para este sistema recordando que la partícula solo se puede mover en aquellos r tales que $H(r) \geq V_{ef}(r)$

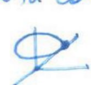
Caso A, $\omega = 0$, la partícula no rota; si $H = H_1$ o $H = H_2$ la partícula desciende hasta $r = 0$, si $H = H_0$, la partícula está quieta en el origen

Caso B, $\omega \neq 0$, tenemos 3 situaciones:

<u>B.1</u> - si $H = H_1$, la partícula desciende al origen mientras rota.



<u>B.2</u> - si $H = H_2$ la partícula rota con $r = r_0 = cte$ pero tenemos un equilibrio inestable.



<u>B.3</u> - si $H = H_3$ la partícula rota y se va hacia $r = \infty$,

Scanned with CamScanner

Calculamos el punto de equilibrio:

$$\left.\frac{dV_{ef}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow mg\cos\alpha - mr\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \Rightarrow$$

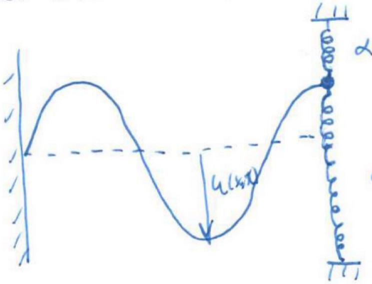
$$\Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}}$$

→ A este radio la fuerza gravitatoria y la fuerza centrífuga se equilibran, pero es un equilibrio inestable, si perturbamos levemente la partícula, se irá bien a $r=0$ o bien a $r\to\infty$.

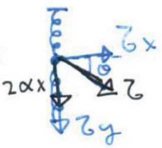
Scanned with CamScanner

Una cuerda de longitud l, masa M y tensión τ tiene en uno de sus extremo una masa m que está unida a dos resortes de cte α, tal y como se muestra en la figura. La masa se mueve sin rozamiento. El otro extremo de la cuerda está fijo. Calcular las longitudes de onda permitidas en los modos estacionarios. Calcular el coeficiente de reflexión del extremo que tiene la masa. M y m son despreciables

(I/2018)



Buscamos la C.C:



Por tanto, aplicando la 2ª ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

$-\tau \operatorname{sen}\theta - 2\alpha x = -m a \simeq 0$, Haremos además una aproximación para ángulos pequeños: $\operatorname{sen}\theta \simeq \operatorname{tg}\theta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$,

Luego: $\tau \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} + 2\alpha\, u(x,l) = 0$ //

→ En el otro extremo la condición es $u(0,t) = 0$ //

Probamos una solución de la ecuación de ondas: $u(x,t) = Ae^{i(kx+wt)} + Be^{i(-kx+wt)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Aki e^{(kx+wt)} - Bki e^{(-kx+wt)}$$

Aplicando las C.C:

$u(0,t) = 0 \Rightarrow Ae^{iwt} + Be^{iwt} = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$

Scanned with CamScanner

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} + \frac{2\alpha}{\tau} u(L,t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A k i e^{i\omega t}\left[e^{ikL} + e^{-kLi}\right] + \frac{2\alpha}{\tau} A e^{i\omega t}\left[e^{ikL} - e^{-ikL}\right] = 0$$

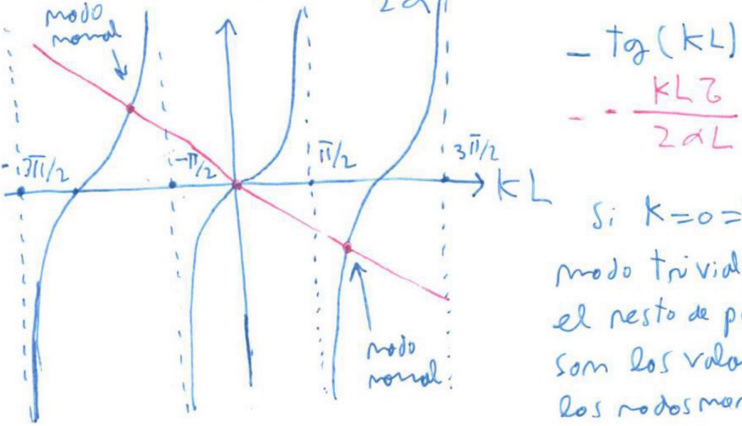
No queremos la solución trivial por lo que $A \neq 0$:

$$ki\left[e^{ikL} + e^{-ikL}\right] = -\frac{2\alpha}{\tau}\left[e^{ikL} - e^{-ikL}\right]$$

Utilizando las definiciones complejas de seno y coseno:

$$\cancel{2}k\cancel{i}\cos(kL) = -\frac{2\alpha}{\tau}\cancel{2i}\,\text{sen}(kL) \Rightarrow$$

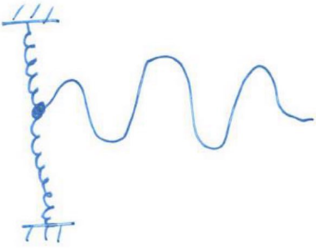
$$\Rightarrow tg(kL) = -\frac{k\tau}{2\alpha}$$, gráficamente:



Si $k=0 \Rightarrow kl=0 \Rightarrow$ modo trivial, por tanto el resto de puntos de corte son los valores de kL para los modos normales.

Scanned with CamScanner

Calculamos el coeficiente de reflexiōn:



Aplicando la C. C. que conocemos:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} + \frac{2\alpha}{\tau} u(L,t) = 0 :$$

$$ik\left[A e^{ikL} - B e^{-ikL}\right]\cancel{e^{i\omega t}} - \frac{2\alpha}{\tau}\cancel{e^{i\omega t}}\left[A e^{ikL} + B e^{-ikL}\right] = 0$$

$$\Rightarrow ik\cancel{A}\left[e^{ikL} - r e^{-ikL}\right] = \frac{2\alpha}{\tau}\cancel{A}\left[e^{ikL} + r e^{-ikL}\right] =$$

$$\Rightarrow ike^{ikL} - re^{-ikL} = \frac{2\alpha}{\tau} e^{ikL} + \frac{2\alpha}{\tau} r e^{-ikL} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{ik + 2\alpha/\tau}{ik - 2\alpha/\tau}\right) e^{2ikL} = -\frac{z}{z^*} e^{2ikL} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r| = \frac{|z|}{|z^*|}\left|e^{2ikL}\right| = 1 //$$ Por lo que

$$R = |r|^2 = 1 /$$ Se conserva la energía //

Scanned with CamScanner

Un punto material de masa m se mueve sobre la recta Ox sometida a una fuerza $F(x) = \frac{2mg}{a^3} x(2x^2 - a^2)$ siendo $a > 0$. Inicialmente m se encuentra en el origen con $V = V_0$.

(a) Calcular $V(x)$ y representarla gráficamente

(b) Describir el movimiento en función de V_0.

(c) Mínimo valor de V_0 para que llegue al infinito.

(VI / 2018)

→ Toda fuerza dependiente de la posición en 1D es conservativa, luego $F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V(x) = -\int F(x)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{2mg}{a^3}\int (a^2x - 2x^3)\,dx = \frac{\cancel{2}mg}{a^3}\left(\frac{a^2}{\cancel{2}}x^2 - \frac{1}{\cancel{2}}x^4\right) + cte$$

→ Colocaremos el origen de potenciales en el punto $x=0$:

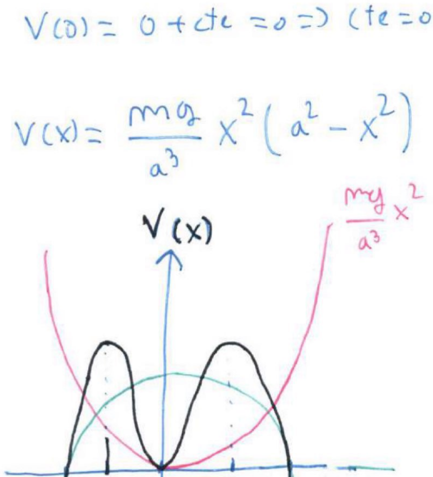
$$V(0) = 0 + cte = 0 \Rightarrow cte = 0, \quad \boxed{V(x) = \frac{mg}{a^3}\left(a^2x^2 - x^4\right)}$$

$$V(x) = \frac{mg}{a^3}x^2(a^2 - x^2)$$

$x \to \infty$, $V(x) \to -\infty$

$x \to -\infty$, $V(x) \to -\infty$

$V(0) = 0$, $V(a) = 0$, $V(-a) = 0$



$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{mg}{a^3}\left(2x(a^2-x^2) - 2x^3\right)$$

Vemos los extremos: $\frac{dV(x)}{dx} = 0$

$$2xa^2 - 2x^3 - 2x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left[2a^2 - 4x^2\right] = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 2a^2 \Rightarrow x^2 = \pm 1/2\, a^2$$

$$x = \pm 1/\sqrt{2}\, a$$

Scanned with CamScanner

Vemos si son máximos o mínimos:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{2mg}{a^3}\left[(a^2-x^2) - 2x^2 - 3x^2\right]$$

$$\left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{2mg}{a} > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es mínimo.}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}a} = \left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}a} = \frac{2mg}{a^3}\left[(a^2 - \frac{1}{2}a^2) - \frac{5}{2}a^2\right] < 0$$

Por tanto $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}a$ son máximos

→ Estudiamos ahora el movimiento en función de V_0; para ello recordamos que la partícula solo puede estar en aquellas x tales que $E(x) \geq V(x)$. Por tanto, si suponemos que $E = E(\frac{1}{2}\sqrt{a})$

$$E(\tfrac{1}{2}\sqrt{a}) = E(0) \Rightarrow T(\tfrac{1}{2}\sqrt{a}) + V(\tfrac{1}{2}\sqrt{a}) = T(0) + V(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{a^3}\left(\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{4}a^4\right) = \frac{1}{2}mV_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\cdot 1}g\,a = \frac{1}{2}V_0^2 \Rightarrow V_0^2 = g\frac{a}{2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{g\,a/2}$$

Por tanto tenemos 3 casos, si $V_0 < \sqrt{ga/2}$ la partícula asciende hasta un punto $x_0 \in [0, a]$, luego retrocede y se queda oscilando entre $-x_0$ y x_0. Si $V_0 = \sqrt{ga/2}$ asciende hasta el punto $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}a$ (dependiendo de si $V_0 > 0$ o $V_0 < 0$) y si $V_0 > \sqrt{ga/2}$ Atraviesa la barrera de potencial y se moverá hacia $\pm\infty$ de nuevo dependiendo del signo de V_0.

$$\boxed{|V_0| > \sqrt{ga/2}}$$

Scanned with CamScanner

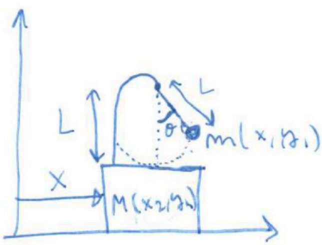
Um péndulo de longitud L y masa m está montado sobre um bloque de masa M que se puede mover horizontalmente sin rozamiento

(a) Escribir la lagrangiana del sistema.

(b) Establecer el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento para pequeñas oscilaciones del sistema

(c) Encontrar las frecuencias propias y los modos ~~propios~~ normales en el caso de pequeñas oscilaciones y $M \gg m$. Interpretar el resultado indicando el movimiento de las masas para cada una de las frecuencias.

(VI / 2018)



2 masas en 2D

2 ligaduras

2 coordenadas generalizadas

$q_1 = X \ , \ q_2 = \theta$

$$\begin{cases} x_1 = X + L\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y_1 = L - L\cos\theta \\ x_2 = X \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{X} + L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_1 = L\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{x}_2 = \dot{X} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^2 = \dot{X}^2 + L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{X}L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_1^2 = L^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\theta \\ \dot{x}_2^2 = \dot{X}^2 \end{cases}$$

Luego $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{X}\dot{\theta}L\cos\theta\right) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2$

$V = mgy_1 = mgL - mgL\cos\theta$

Por tanto $\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + m\dot{X}\dot{\theta}L\cos\theta - mg(L - L\cos\theta)}$

Scanned with CamScanner

Para pequeñas oscilaciones: $\cos\theta \simeq \underbrace{1-\frac{\theta^2}{2}}_{\text{En } V} \simeq \underbrace{1}_{\text{En } T}$

$$L \simeq \frac{1}{2}(m+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mL\dot{\theta}\dot{x} - \cancel{mgL} + mg(\cancel{1}-\frac{\theta^2}{2})L$$

→ Escribimos las ecuaciones diferenciales del movimiento:

Ecuación de θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgL\theta \qquad \boxed{-g\theta = \ddot{\theta}L + \ddot{x}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} + mL\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x}$$

Ecuación de x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow x \text{ es coordenada cíclica.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{(m+m)\dot{x} + mL\dot{\theta} = P_x = cte}$$

→ Las matrices $\{m\}$ y $\{A\}$ son:

$$\{m\} = \begin{pmatrix} m+M & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \theta m L g$$

$$A_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mLg$$

$$\{A\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mLg \end{pmatrix} \qquad 0 = A_{ij},\ i \neq 2, j \neq 2$$

Scanned with CamScanner

→ Calculamos las frecuencias de oscilación, $\det[\{A\} - w^2\{m\}] = 0$

$$\begin{vmatrix} -w^2(M+m) & -w^2 mL \\ -w^2 mL & mLg - w^2 mL^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (mLg - w^2 mL^2)(-w^2(M+m)) - w^4 mL^2 = 0 \Rightarrow \boxed{w_0 = 0}$$

$$\Rightarrow -w^2 \cancel{m} Lg(M+m) + w^4 \cancel{m}(M+m)L^2 - w^4 \cancel{m} L^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Lg(M+m) + w^2 ML^{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w^2 = \frac{g(M+m)}{ML} \Rightarrow \boxed{w_1 = \sqrt{\frac{g(M+m)}{ML}}}$$

Si $m \ll M$

$w_1 \simeq \sqrt{g/L}$

péndulo simple

Vemos los autovectores del problema $[\{A\} - w_i^2\{m\}]\vec{a}_i = 0$

Para $w = w_0 = 0$ $\quad \vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_2 = 0$

$a_1 = a$

$\vec{a} = (a, 0)$

Para $w = w_1 = \sqrt{\frac{g(M+m)}{ML}}$ $\quad \vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{(M+m)^2}{ML} g & -\frac{(M+m)m}{ML} g \\ -\frac{(M+m)m}{ML} g & \frac{-m^2 L}{M} g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$-\frac{(M+m)^2}{\cancel{M}L}\cancel{g}\, b_1 = \frac{(M+m)m}{\cancel{M}}\cancel{g}\, b_2 \Rightarrow b_2 = -\frac{(M+m)}{mL} b_1$$

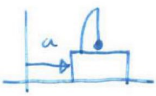
$$\vec{b} = \left(b, -\frac{(M+m)}{mL} b \right)$$

→ Los modos de oscilación del sistema serán:

<u>Modo 1</u> $\omega = \omega_0 = 0$ $M_2 = 0$, M_1 vibra:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -\frac{M+m}{mL} b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x = aM_1 \\ \theta = 0 \end{array}$$

→ Se trata de un movimiento de translación del sistema, no un modo de oscilación:

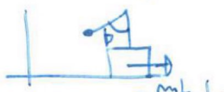


$\left[x(t) = C_1 + C_2 t \right]$

<u>Modo 2</u> $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{(M+m)g}{ML}}$ $M_1 = 0$, M_2 vibra:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -\frac{M+m}{mL} b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x = bM_2 \\ \theta = -\frac{M+m}{ML} bM_2 \end{array}$$

oscilan de forma antisimétrica con el bloque teniendo menor amplitud:



La solución general será la suma de los dos modos

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 t - \frac{mLb}{M+m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \theta(t) = b\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \text{si } M \gg m: x(t) = C_1 + C_2 t \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

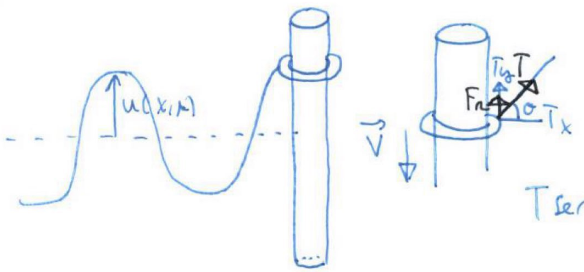
Uma onda armónica se propaga por uma cuerda de tensión τ que tiene em su extremo em $x=L$ um amortiguador que ejerce uma fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad.

ⓐ Demuestra que la condición de contorno em el extremo $x=L$ viene dado por: (com γ coeficiente de amortiguamiento)

$$\tau \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=L} \qquad (\text{VI}/2018)$$

ⓑ Calcula el cociente entre la amplitud de la onda reflejada y la incidente (coeficiente de reflexión) em $x=L$. Interpreta el resultado discutiendo los distintos casos posibles. ¿Se formarán ondas estacionarias?.

Buscamos la C.C:



Aplicando la 2.ª ley de Newton:

$$T \operatorname{sen}\theta + \gamma V = 0 \quad (m \to 0)$$

Haciendo uma aproximación para $\theta \ll 1$, $\operatorname{sen}\theta \simeq \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}$

además $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=L} = V$, por tanto:

$$\boxed{\tau \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=L}}$$

Probamos uma solución de una superposición de una onda incidente y otra reflejada: $u(x,t) = Ae^{i(kx+\omega t)} + Be^{i(-kx+\omega t)}$

Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial u}{\partial x} = kiA e^{i(kx-\omega t)} - kiBe^{i(-kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega iAe^{i(kx-\omega t)} + \omega iBe^{i(-kx-\omega t)}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = ki e^{-i\omega t}\left(Ae^{kiL} - Be^{-kiL}\right)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=L} = -\omega i e^{-i\omega t}\left(Ae^{ikL} + Be^{-ikL}\right)$$

Aplicando la C.C:

$$Z ki \cancel{e^{i\omega t}}\left[Ae^{kiL} - Be^{-kiL}\right] = +\gamma \omega i \cancel{e^{i\omega t}}\left[Ae^{ikL} + Be^{-ikL}\right]$$

Definiendo $r = B/A$ y dividiendo todo por A:

$$Zk\, e^{kiL} - rZke^{-kiL} = +\gamma\omega e^{ikL} + \gamma\omega r e^{-ikL} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\left(-\gamma\omega e^{-ikL} - Zk e^{-ikL}\right) = +\left(\gamma\omega e^{ikL} - Zk e^{ikL}\right)$$

$$\Rightarrow r = +\left(\frac{\gamma\omega - Zk}{\gamma\omega + Zk}\right) e^{2ikL} = -\frac{Z}{Z^*} e^{2ikL}$$

$$R^2 = \left|\frac{Z}{Z^*}\right|^2 \underbrace{\left|e^{2ikL}\right|}_{=1} = \frac{|Z|^2}{|Z^*|^2}$$

Por tanto estudiamos los distintos casos:

$$\left|\frac{\gamma\omega - Zk}{\gamma\omega + Zk}\right|$$

Si $\gamma = \frac{+Zk}{\omega}$ se absorve toda la energía $(R^2=0)$ no hay onda reflejada.

Si $\gamma=0$, $R^2=1$, se emite toda la energía

Solo se emiten ondas estacionarias si $R^2=1$, $\gamma=0$ //

Scanned with CamScanner